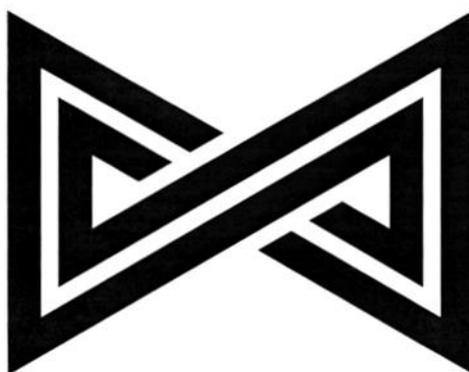


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

В.Р. Душин, М.Н. Смирнова, В.В. Тюренкова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ



Москва – 2020

УДК 532.5.011
ББК 22.25

Рецензенты:

А.Б. Киселев – доктор физико-математических наук, профессор

С.Г. Вольпин – кандидат технических наук, заведующий отделом

В.Р. Душин, М.Н. Смирнова, В.В. Тюренкова. *Распространение волн в сплошных средах. Монография.* – Москва: Изд-во ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2020. – 111 с.

Монография знакомит с основами теории волновых движений сплошных сред. Книга излагает теоретические основы постановок задач, выведены основные уравнения для описания нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения в одномерном приближении, получено общее решение волнового уравнения для случая плоских волн и в сферически-симметричном случае.

Сформулирована задача Коши для волнового уравнения, введено понятие устойчивости решения, инварианты Римана для линеаризованной системы уравнений для случая плоской симметрии. Проведен сравнительный анализ некоторых свойств квазилинейной и линейной систем уравнений. В качестве примеров рассмотрены задачи об отражении акустической волны от абсолютно твердой (жесткой) стенки, о распространении сигнала от точечного источника для случая сферических волн и для случая цилиндрических волн, о распространении возмущений от движущегося точечного источника.

Монография включает теоретические вопросы распространения волн, излагавшиеся авторами в различные годы на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по специальностям механика, математическое моделирование. Издание второе, переработанное.

Издание подготовлено редакционно-издательским отделом ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН
Начальник отдела – В.Е.Текунов. Редактор издания – А.Н.Никонова.

© ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН

© Душин Владислав Роальдович

© Смирнова Мария Николаевна

© Тюренкова Вероника Валерьевна

ISBN 978-5-93838-079-0

Содержание

Введение.....	4
Лагранжево и эйлерово описания движения сплошной среды.....	6
Основные уравнения для описания нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения в одномерном приближении (нестационарная квазиодномерная модель газовой динамики).....	10
Общее решение волнового уравнения для случая плоских волн.	20
Общее решение волнового уравнения в сферически-симметричном случае.....	22
Задача Коши для волнового уравнения в случае плоских волн.....	22
Понятие устойчивости решения.	31
Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений.	32
Кусочно-дифференцируемые решения волнового уравнения.	40
Интегральные законы сохранения для подвижного объема.	42
Интегральные законы сохранения для неподвижного объема (балансовый метод).	43
Введение в метод (u, p) - диаграмм.	66
Инварианты Римана для линеаризованной системы уравнений одномерной газовой динамики для случая плоской симметрии ($S(t, x) = const$).....	71
Решение задачи Коши для линейной системы при помощи инвариантов Римана.	72
Сравнительный анализ некоторых свойств квазилинейной и линейной систем уравнений одномерной газовой динамики.....	79
Некоторые свойства одномерных плоских, сферических и цилиндрических волн.....	82
Задача об отражении акустической ударной волны от абсолютно твердой (жесткой) стенки для случая плоских волн.....	88
Задача о поршне в акустической постановке для случая плоских волн.	91
Распространение сигнала от точечного источника для случая сферических волн.....	100
Распространение сигнала от источника для случая цилиндрических волн.....	100
Задача о распаде разрыва в акустической постановке для сферического случая.	96
Распространение возмущений от движущегося точечного источника.	98
Список вопросов к курсу лекций “Распространение волн в сплошных средах ч.1”	101
Литература	104

Введение

По-видимому, не существует единого строго определения понятия волны. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее руководствоваться интуитивным представлением о **волне** как о **любом различимом сигнале, передающемся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью**. Такой сигнал может быть **возмущением любого вида**, например

максимум какой-либо величины или резким ее изменением при условии, что это возмущение четко выделено и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом должен оставаться различимым. Такое определение может показаться несколько расплывчатым, но оно оказывается вполне приемлемым, а любая другая попытка дать более строгое определение представляется слишком ограничительной, поскольку различным типам волн присущи различные характерные черты.

Математически, тем не менее, можно выделить **два основных класса волн**. Первый класс волн описывается гиперболическими уравнениями в частных производных второго порядка, волны этого класса будут называться **гиперболическими**. Второй класс столь просто охарактеризовать нельзя, но, поскольку простейшими его представителями являются диспергирующие волны в линейных задачах, мы будем называть все волны этого класса **диспергирующими**. Наше деление на классы не является исчерпывающим. Поскольку с одной стороны, эти классы пересекаются, так как в некоторых волновых движениях проявляются оба типа поведения, а с другой существуют исключения, не соответствующие ни одному из них.

При описании гиперболических волн за основу часто берут волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \nabla^2 \phi, \quad \text{где } \nabla^2 = \Delta \text{ - оператор Лапласа} \quad (0.1)$$

Существует четкое определение гиперболических уравнений, зависящее только от вида уравнений и не зависящее от возможности получения решений в явном виде.

Понятие диспергирующих волн связано, скорее, с характерным видом решений, чем с конкретным типом уравнения. **Линейная диспергирующая система** – это любая система, имеющая решения вида

$$\phi = a \cdot \cos(\kappa \cdot x - \omega \cdot t) \quad (0.3)$$

где частота ω - известная вещественная функция волнового числа κ . Фазовая скорость волны в данном случае равна $\omega(\kappa) / \kappa$, и **волны обычно называют диспергирующими, если эта фазовая скорость не постоянна, а зависит от κ** . Поэтому будем говорить, что

волна вида (0.3) является диспергирующей, если $\frac{d\omega}{d\kappa} \neq const$, т.е. если $\frac{d^2\omega}{d\kappa^2} \neq 0$.

Следует отметить, что функция (0.3) является также решением волнового уравнения (0.1) с $\omega(\kappa) = \pm c_0 \cdot \kappa$, но эти случаи исключены из нашего определения диспергирующего

класса волн условием $\frac{d^2\omega}{d\kappa^2} \neq 0$. Однако, нетрудно привести примеры действительного

пересечения классов, когда уравнения оказываются гиперболическими, и в то же время имеют решения вида (0.3) с нетривиальным соотношением $\omega = \omega(\kappa)$. Один из таких примеров – уравнение Клейна-Гордона (одно из основополагающих уравнений

релятивистской квантовой теории поля (КТП), определяющее зависимость волновой функции $\phi(x, t)$ частиц с нулевым спином от времени и координат)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi = 0,$$

которое является гиперболическим и одновременно имеет решение вида (0.3) с $\omega^2 = \kappa^2 + 1$.

Отметим также, что, несмотря на обширность и разнообразие класса гиперболических волн, большая часть волновых процессов, по-видимому, все же относится к классу диспергирующих волн. Наиболее известные из всех волн – океанские волны – являются диспергирующими и описываются уравнением Лапласа с необычными граничными условиями на свободной поверхности.

Физики обычно дают такое определение понятия волны. **Волны – это изменения состояния среды (возмущения), распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию.** Наиболее важные и часто встречающиеся виды волн – **упругие волны** (волны, распространяющиеся в жидких, твёрдых и газообразных средах за счёт действия упругих сил, возникающих в теле в результате его деформации и стремящихся вернуть его в исходное (начальное) состояние), волны на поверхности жидкости и электромагнитные волны. Частными случаями упругих волн являются звуковые и сейсмические волны, а электромагнитных – радиоволны, свет, рентгеновские лучи и другие. Основное свойство всех волн, независимо от их природы, состоит в том, что **в волне осуществляется перенос энергии без переноса вещества** (последний может иметь место лишь как побочное явление).

Волны могут различаться по тому, как возмущения ориентированы относительно направления их распространения. Так, например, звуковая волна распространяется в газе в том же направлении, в каком происходит смещение частиц газа; при распространении волны вдоль струны смещение точек струны происходит в направлении, перпендикулярном струне. Волны первого типа называются **продольными**, а второго – **поперечными**.

В жидкостях и газах упругие силы возникают только при сжатии и не возникают при сдвиге, поэтому упругие деформации в жидкостях и газах могут распространяться только в виде продольных волн (волны сжатия). В твердых телах, в которых упругие силы возникают также при сдвиге, упругие деформации могут распространяться не только в виде продольных волн, но и в виде поперечных (волны сдвига). В электромагнитных волнах направления электрических и магнитных полей почти всегда (за исключением случаев анизотропных сред и распространения в несвободном пространстве) перпендикулярны направлению распространения волны, поэтому электромагнитных волны в свободном пространстве – поперечны.

Введем основные характеристики волны. **Длиной волны λ** называется расстояние между двумя максимумами или минимумами возмущения (так называемыми **фазами волны**), **период волны T** - это время, за которое совершается один полный цикл колебания.

Длина волны λ связана с периодом T соотношением $\frac{\lambda}{c} = T$, где c – скорость

распространения волны (или **фазовая скорость**). Вместо периода T нередко пользуются частотой ω , равной числу периодов в единицу времени: $\omega = \frac{1}{T}$, при этом $\omega \cdot \lambda = c$.

В теории волн вводится также волновой вектор $\vec{\kappa}$, ориентированный по направлению

распространения волны, модуль которого называется **волновым числом** и равен $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

т. е. равен числу длин волн на отрезке 2π .

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности имеют форму плоскости или сферы, соответственно волны называют **плоскими** или **сферическими**. В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – систему концентрических сфер.

Лагранжево и эйлерово описания движения сплошной среды

В рамках механики сплошной среды все частицы сплошной среды отличимы друг от друга – индивидуализируемы. Каждой индивидуальной частице сплошной среды ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Эта тройка называется

лагранжевыми координатами индивидуальной частицы. Лагранжевы координаты используются, чтобы указать эту частицу, т. е. служат ее “именем”, так же, как номера служат “именами” частиц, когда последние расположены дискретно. В качестве лагранжевых координат частицы (ξ_1, ξ_2, ξ_3) обычно используются пространственные

координаты точки $(x_1, x_2, x_3) \Big|_{t=0}$, в которой эта частица находилась в начальный момент времени $t = 0$.

Как известно, движение сплошной среды и происходящие процессы описываются полями физических величин (скорости \vec{V} , давления p , плотности ρ , температуры T и т.д.).

Лагранжев подход.

Если эти величины рассматриваются как функции лагранжевых координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и времени t , то описание называется **лагранжевым** или **материальным**. Таким образом, если $\vec{v} = \vec{v}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $p = p(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\rho = \rho(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и т. д., то это лагранжево описание движения сплошной среды. При этом подходе события описываются как происходящие с индивидуальными частицами. **Основной кинематической характеристикой при лагранжевом описании является закон движения сплошной среды**, т.е. зависимость пространственных координат от лагранжевых и времени:

$\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ или в координатной записи $x_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $i = 1, 2, 3$.

Тогда скорость и ускорение частиц сплошной среды определяются соотношениями:

$$\vec{v}(t, \vec{\xi}) = \left. \frac{\partial \vec{r}(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}}, \quad \vec{a}(t, \vec{\xi}) = \left. \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}}, \quad \text{где вектор } \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

По определению **скорость изменения некоторой величины A в индивидуальной частице сплошной среды** (т. е. при фиксированных значениях лагранжевых координат)

называется **индивидуальной**, или **материальной**, или **полной производной** по времени от величины A и обозначается $\frac{dA}{dt}$ (в некоторых книгах обозначается $\frac{DA}{Dt}$).

При лагранжевом описании (т.е., когда $A = A(t, \vec{\xi})$) полная производная величины A по времени t равна $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A(t, \vec{\xi})}{\partial t} \Big|_{\vec{\xi}}$ по определению.

Эйлеров подход.

При **эйлеровом описании** (иногда говорят **пространственном описании**) физические величины рассматриваются как функции пространственных координат (x_1, x_2, x_3) и времени t . При этом подходе события описываются как происходящие в точках пространства. **Основной кинематической характеристикой при эйлеровом описании является поле скорости** $\vec{v}(t, \vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Вектор скорости $\vec{v}(t, \vec{x})$ - это скорость частицы сплошной среды, которая в момент времени t находится в точке пространства с координатами (x_1, x_2, x_3) .

Переход от лагранжева описания к эйлеровому:

Для того, чтобы перейти от лагранжева описания к эйлеровому, нужно соотношения, выражающие закон движения $x_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $i = 1, 2, 3$, разрешить относительно лагранжевых координат, т.е. найти функции $\xi_\alpha = g_\alpha(t, x_1, x_2, x_3)$, где $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда для любой величины A , лагранжево описание которой $A = A(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ известно, эйлерово описание находится как сложная функция $A = A(t, g_1(t, \vec{x}), g_2(t, \vec{x}), g_3(t, \vec{x}))$.

Переход от эйлерова описания к лагранжеву:

Для того, чтобы перейти от эйлерова описания к лагранжеву, нужно найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x_1, x_2, x_3), \text{ где } i = 1, 2, 3 \quad (0.1.0)$$

с начальными условиями $x_1|_{t=0} = \xi_1, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3$.

Полученное решение $x_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $i = 1, 2, 3$ и есть закон движения сплошной среды, а (ξ_1, ξ_2, ξ_3) - лагранжевы координаты частиц. Тогда для любой величины A , эйлерово описание которой $A = A(t, x_1, x_2, x_3)$ известно, лагранжево описание находится как сложная функция $A = A(t, f_1(t, \vec{\xi}), f_2(t, \vec{\xi}), f_3(t, \vec{\xi}))$.

Вычисление полной производной $\frac{dA}{dt}$ величины A по времени **при эйлеровом описании** (т.е., когда $A = A(t, x_1, x_2, x_3)$):

При вычислении полной производной в эйлеровом описании используем:

1. определение закона движения среды $x_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $i = 1, 2, 3$,

2. определение компонент вектора скорости $v_i = \left. \frac{\partial x_i(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = \left. \frac{\partial f_i(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}}$

тогда по определению полной производной имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t, x_1, x_2, x_3)}{dt} &\stackrel{def}{=} \left. \frac{\partial A(t, f_1(t, \vec{\xi}), f_2(t, \vec{\xi}), f_3(t, \vec{\xi}))}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = \left\{ m. k. x_i = f_i(t, \vec{\xi}) \right\} = \\ &= \left. \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \left. \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_i} \right|_{t, x_{j \neq i}} \cdot \left. \frac{\partial f_i(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = \left\{ m. k. v_i = \left. \frac{\partial f_i(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} \right\} = \\ &= \left. \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \left. \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_i} \right|_{t, x_{j \neq i}} \cdot v_i(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

т. е., $\frac{dA(t, x_1, x_2, x_3)}{dt} = \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_3}$,

или в сокращенной записи $\frac{dA(t, \vec{x})}{dt} = \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot grad(A(t, \vec{x}))$, (0.1.1)

где $grad(A(t, \vec{x})) = \left(\frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial x_3} \right)$ - вектор градиента величины A ,

$\vec{v}(t, \vec{x}) = (v_1(t, \vec{x}), v_2(t, \vec{x}), v_3(t, \vec{x}))$ - вектор скорости среды.

Полученная формула (0.1.1) для полной производной величины A при эйлеровом описании может быть озвучена так: скорость изменения величины A в индивидуальной частице сплошной среды при эйлеровом описании равна скорости изменения величины A в той точке эйлерова пространства, в которой в данный момент находится

индивидуальная частица (слагаемое $\frac{\partial A(t, \vec{x})}{\partial t}$), плюс скорость изменения величины за

счет переноса в данную точку пространственного изменения величины A в результате макроскопического движения сплошной среды (слагаемое $\vec{v}(t, \vec{x}) \cdot grad(A(t, \vec{x}))$).

Пример: выберем в качестве величины A вектор скорости среды $\vec{v}(t, \vec{x})$. Тогда формула (0.1.1) дает выражение для вектора ускорения $\vec{a}(t, x)$ при эйлеровом описании

$$\vec{a}(t, x) = \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{x})}{\partial t} + v_1(t, x) \cdot \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{x})}{\partial x_1} + v_2(t, x) \cdot \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{x})}{\partial x_2} + v_3(t, x) \cdot \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{x})}{\partial x_3}$$

Напомним, что **траекторией частицы** (ξ_1, ξ_2, ξ_3) называется геометрическое место ее положений во все моменты времени. Находятся траектории из решения приведенной выше задачи Коши для системы уравнений (0.1.0), из которой, в частности, следует, что вектор скорости в каждый момент времени направлен по касательной к траектории частицы. Более того, данное определение траектории позволяет нам интерпретировать **полную производную как оператор дифференцирования по времени вдоль траектории частицы**. Выпишем этот оператор:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (0.1.2)$$

Формула (0.1.2) теперь без особого труда может быть обобщена на случай дифференцирования вдоль произвольной параметрически заданной кривой в эйлеровом пространстве:

Пусть кривая задана соотношениями $x_i = x_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, где τ - параметр. Тогда оператор полного дифференцирования вдоль кривой $x_i = x_i(\tau)$ примет вид

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (0.1.3)$$

применительно к любой функции $A = A(\tau, x_1, x_2, x_3)$.

Если функция $A = A(x_1, x_2, x_3)$ явно не зависит от параметра τ , то формула (0.1.3)

упрощается до вида $\frac{d}{d\tau} = \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Основные уравнения для описания нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения в одномерном приближении (нестационарная квазиодномерная модель газовой динамики).

Балансовый метод (или метод потоков) вывода основных соотношений из законов сохранения массы, импульса и энергии. Здесь $\vec{v}(t, x) = (u(t, x), 0, 0)$ - вектор скорости, $\rho(t, x)$ - величина плотности газа, $p(t, x)$ - величина давления в газе, $S(t, x)$ - величина площади поперечного сечения канала, $\angle\theta$ - угол наклона к оси Ox касательной к образующей стенки канала, h - расстояние от оси канала до образующей.

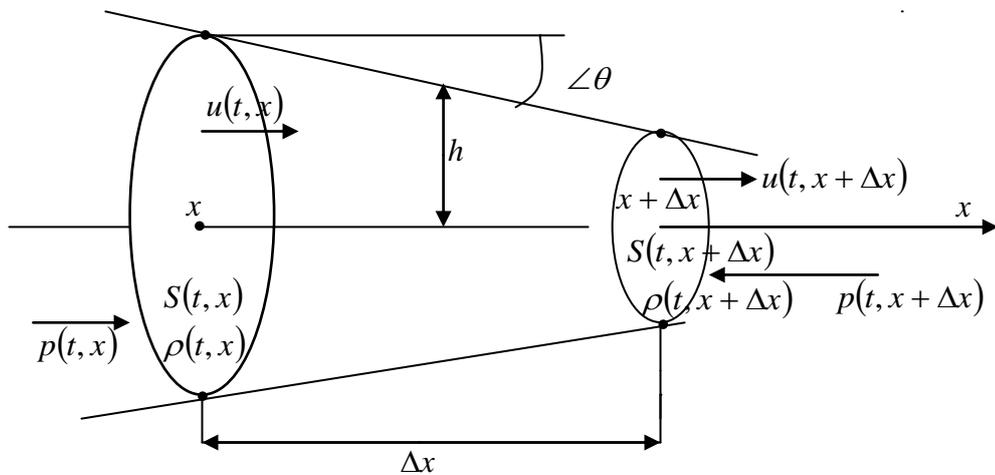


Рис. 1.1

Для рассматриваемого нами выделенного бесконечно малого эйлерового (неподвижного) контрольного объема сплошной среды (но содержащего при этом достаточно много частиц сплошной среды) запишем балансовое соотношение сохранения (изменения) массы.

Величина рассматриваемого объема с точностью до малых второго порядка равна:

$$\Delta\Omega = S(t, x) \cdot \Delta x + o(\Delta x^2)$$

Тогда величина массы m нашей среды в контрольном объеме $\Delta\Omega$ в моменты времени t и $t + \Delta t$ равна:

$$m(t, x) = \rho(t, x) \cdot S(t, x) \cdot \Delta x, \quad m(t + \Delta t, x) = \rho(t + \Delta t, x) \cdot S(t + \Delta t, x) \cdot \Delta x, \text{ где } \rho \text{ - плотность.}$$

Считая, что боковая поверхность канала – непроницаема, изменение массы в объеме $\Delta\Omega$ за время Δt складывается за счет потоков массы через левое и правое поперечные сечения канала $S(t, x)$, $S(t, x + \Delta x)$:

$$m(t + \Delta t, x) - m(t, x) = \rho(t, x) \cdot u(t, x) \cdot S(t, x) \cdot \Delta t - \rho(t, x + \Delta x) \cdot u(t, x + \Delta x) \cdot S(t, x + \Delta x) \cdot \Delta t \quad (1.1)$$

или, подставляя выражения для $m(t + \Delta t, x)$, $m(t, x)$ в (1.1), получим

$$\rho(t + \Delta t, x) \cdot S(t + \Delta t, x) \cdot \Delta x - \rho(t, x) \cdot S(t, x) \cdot \Delta x = \rho(t, x) \cdot u(t, x) \cdot S(t, x) \cdot \Delta t - \rho(t, x + \Delta x) \cdot u(t, x + \Delta x) \cdot S(t, x + \Delta x) \cdot \Delta t \quad (1.2)$$

Разделим левую и правую часть (1.2) на $\Delta t \cdot \Delta x$ и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Изменение количества движения среды в контрольном объеме $\Delta\Omega$ за время Δt равно притоку количества движения через боковую поверхность контрольного объема плюс импульс внешних для данного объема сил (заметим, что боковая поверхность канала образована боковой поверхностью канала плюс левое и правое поперечные сечения канала):

$$\begin{aligned} & \rho(t + \Delta t, x)u(t + \Delta t, x)S(t + \Delta t, x)\Delta x - \rho(t, x)u(t, x)S(t, x)\Delta x = \rho(t, x)u^2(t, x)S(t, x)\Delta t - \\ & - \rho(t, x + \Delta x)u^2(t, x + \Delta x)S(t, x + \Delta x)\Delta t + p(t, x)S(t, x)\Delta t - p(t, x + \Delta x)S(t, x + \Delta x)\Delta t - \\ & - p(t, x)\Pi(t, x)\sin\theta\Delta x\Delta t \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Pi(t, x)$, $\Pi(t, x) \cdot \Delta x$ - периметр и площадь боковой поверхности канала, соответственно, θ - угол наклона к оси Ox касательной к образующей стенки канала.

Член $p(t, x) \cdot \Pi(t, x) \cdot \sin\theta \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ - есть импульс сил давления на боковой поверхности канала в проекции на ось Ox . Для малых углов θ справедливы следующие оценки

$\sin\theta \approx \text{tg}(\theta) \approx -\frac{\partial h}{\partial x}$, где $h(t, x)$ - высота канала.

$$\text{Тогда } \Pi(t, x) \cdot \sin\theta \approx -\Pi(t, x) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Подставив (1.5) в (1.4), разделим левую и правую части (1.4) на $\Delta t \cdot \Delta x$, и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. Получим уравнение:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho \cdot u^2 + p) \cdot S)}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \quad (1.7)$$

Аналогично, изменение полной энергии газа $E = e + \frac{u^2}{2}$ в выделенном контрольном объеме

$\Delta\Omega$ равно притоку полной энергии через боковую поверхность контрольного объема плюс работа внешних активных сил на действительных перемещениях.

Здесь e - внутренняя энергия газа.

$$\begin{aligned} & (\rho \cdot E \cdot S)|_{t+\Delta t, x} \cdot \Delta x - (\rho \cdot E \cdot S)|_{t, x} \cdot \Delta x = (\rho \cdot u \cdot E \cdot S)|_{t, x} \cdot \Delta t - \\ & - (\rho \cdot u \cdot E \cdot S)|_{t, x+\Delta x} \cdot \Delta t + (p \cdot u \cdot S)|_{t, x} \cdot \Delta t - (p \cdot u \cdot S)|_{t, x+\Delta x} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (1.8)$$

Разделим левую и правую части (1.8) на $\Delta t \cdot \Delta x$ и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$.

Получим уравнение закона сохранения энергии для течения газа в канале переменного сечения $S(t, x)$:

$$\frac{\partial(\rho \cdot E \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot E \cdot S)}{\partial x} = -\frac{\partial(p \cdot u \cdot S)}{\partial x} \quad \text{или после переноса правой части в левую часть}$$

уравнения получим окончательную форму записи

$$\frac{\partial(\rho \cdot E \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho \cdot E + p) \cdot u \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

Полученные из законов сохранения массы, импульса и энергии уравнения (1.3), (1.7), (1.9) образуют систему трех уравнений в частных производных первого порядка относительно четырех неизвестных функций $\rho(t, x)$, $u(t, x)$, $p(t, x)$, $e(t, x)$ (зависимость площади поперечного сечения канала $S = S(t, x)$ мы считаем известной заданной функцией своих аргументов), что наталкивает на мысль о необходимости дополнительного уравнения для указанных выше переменных. Таким замыкающим уравнением служит

термодинамическое уравнение состояния нашей среды - совершенного газа, получаемое как следствие из термического и калорического уравнений состояния:

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (1.10)$$

$$e = c_v T \quad (1.11)$$

где T - абсолютная температура, c_v и c_p - теплоемкости при постоянном объеме и давлении, R - газовая постоянная. Из (1.10) и (1.11) при помощи тождества Майера $R = c_p - c_v$ нетрудно получить следствие

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1) \cdot \rho}, \quad (1.12)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ - показатель адиабаты Пуассона.

Уравнение (1.12) замыкает нашу систему уравнений. Заметим, что для задач, где важно знать значение температуры, необходимо дополнительно привлекать одно из уравнений (1.10), (1.11). Выпишем теперь полную систему уравнений для описания нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения в одномерном приближении

$$\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial x} = 0, \quad (1.13.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho \cdot u^2 + p) \cdot S)}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1.13.2) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{u^2}{2}) \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho \cdot (e + \frac{u^2}{2}) + p) \cdot u \cdot S)}{\partial x} = 0, \quad (1.13.3)$$

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot e, \quad (1.13.4)$$

Система уравнений (1.13) – это система трех уравнений в частных производных первого порядка и одного конечного (алгебраического) соотношения. По отношению к частным производным от искомых функций – это линейная система уравнений, такие системы уравнений в частных производных называются квазилинейными. По отношению к искомым функциям $\rho(t, x), u(t, x), p(t, x), e(t, x)$ – это нелинейная система уравнений и, как следствие, сумма решений не является решением.

Отметим еще одно замечательное свойство универсальности нашей системы (1.13), порождаемое учетом переменности площади поперечного сечения канала в математической модели. Свойство универсальности состоит в том, что наша система одинаково успешно описывает одномерные течения с плоскими и сферическими волнами или другими словами одномерные течения с плоской, цилиндрической и сферической симметрией. Для этого достаточно принять $S(t, x) = const$ для случая плоских волн, $S(t, x) = x^2$ для сферических волн.

При изучении свойств любой системы уравнений полезен поиск других равносильных форм записи, которые возможно позволят увидеть какие-то другие стороны исходной системы. Попробуем и мы преобразовать нашу систему уравнений (1.13). Для этого вычтем из уравнения импульсов уравнение неразрывности, умноженное на скорость, т.е. (1.13.2)-(1.13.1)· u и после приведения/сокращения подобных членов получим преобразованное уравнение импульсов

$$S \cdot \left(\rho \cdot \frac{\partial(u)}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(p)}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.14.1)$$

Аналогично вычтем из уравнения энергии уравнение неразрывности, умноженное на полное теплосодержание $H = E + \frac{p}{\rho} = e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = i + \frac{u^2}{2}$ (где i - энтальпия) и, кроме того, вычтем из полученного результата уравнение (1.14.1), умноженное на скорость, т.е. выполним такие действия: (1.13.3)-(1.13.1)· H -(1.14.1)· u , и после приведения/сокращения подобных членов получим преобразованное уравнение энергии

$$S \cdot \left(\rho \cdot \left(\frac{\partial(e)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial(e)}{\partial x} \right) - \frac{p}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial(\rho)}{\partial x} \right) \right) - p \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t} = 0 \quad (1.14.2)$$

Вспомним теперь определение полной (или индивидуальной или субстанциональной) производной $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, тогда (1.14.2) переписывается в виде

$$S \cdot \left(\rho \cdot \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} \right) - p \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \frac{p}{S \cdot \rho} \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t}$$

или, введя удельный объем $V = \frac{1}{\rho}$, получим $\frac{de}{dt} + p \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t}$ (1.14.3)

Из первого начала термодинамики следует, что $\delta q = de + p \cdot dV$, где δq - бесконечно малое приращение (т.е. приток/отток) тепла q . Из второго начала термодинамики нам известно, что при помощи интегрирующего множителя $\frac{1}{T}$, где T - абсолютная

температура, δq превращается в полный дифференциал энтропии s , т.е. $\delta q \cdot \frac{1}{T} = ds$.

Просьба не путать написание удельной энтропии s с написанием величины площади поперечного сечения канала S .

Тогда, применяя первое и второе начала, мы получим $T \cdot ds = de + p \cdot dV$ или

$$T \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \cdot \frac{dV}{dt}, \text{ т.к., напр., } de = \frac{\partial e}{\partial t} dt + \frac{\partial e}{\partial x} dx = \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial e}{\partial x} \right) dt = \frac{de}{dt} dt. \quad (1.14.4)$$

С использованием (1.14.4) преобразованное уравнение энергии (1.14.3) **для гладких**

(класса C^1 решений) запишется в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{p \cdot V}{T} \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t} \quad (1.14.5)$$

В этом месте следует отметить, что привлечение второго начала термодинамики вызвало на свет новую переменную в нашей задаче – термодинамическую функцию состояния системы энтропию $s = s(t, x)$. Возникает вопрос: как связана эта новая термодинамическая функция состояния системы с исходными термодинамическими переменными p, ρ, T ? Ее появление в преобразованной системе с переменными p, ρ, s вызовет замену замыкающего соотношения (1.13.4) на новое замыкающее соотношение. Для его получения в случае термически и калорически совершенного газа воспользуемся соотношением, полученным из первого начала термодинамики с привлечением второго начала:

$$T \cdot ds = de + p \cdot dV \quad (1.14.6)$$

подставляя термическое и калорическое уравнения состояния для совершенного газа

$$p = \frac{R \cdot T}{V} \text{ и } e = c_v T \text{ получим } ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} dV = c_v \left[\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} \right], \text{ далее интегрируя}$$

$$s = c_v \cdot \ln \left[T \cdot (V)^{\frac{R}{c_v}} \right] + \text{const}, \quad s_0 = c_v \cdot \ln \left[T_0 \cdot (V_0)^{\frac{R}{c_v}} \right] + \text{const} \Rightarrow \frac{s - s_0}{c_v} = \ln \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{R}{c_v}} \right]$$

т. к. $R = c_p - c_v$, то $\frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - 1 = \gamma - 1$; но $T = \frac{pV}{R}$ и $T_0 = \frac{p_0 V_0}{R} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{V}{V_0}$, поэтому

$$\frac{s - s_0}{c_v} = \ln \left[\frac{T}{T_0} \cdot \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\gamma - 1} \right] = \ln \left[\frac{p}{p_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^\gamma \right] \quad (1.14.7)$$

Итак,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\gamma} \cdot \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right) \quad (1.14.8)$$

Соотношение (1.14.8) устанавливает связь между давлением, плотностью и энтропией для обратимых процессов в рамках модели совершенного газа, значения величин с индексом "0" отвечают некоторому начальному состоянию системы.

Преобразуем теперь уравнение сохранения/изменения массы (уравнение неразрывности) (1.13.1) к классическому виду, известному вам из МСС. Для этого раскроем частные производные в левой части уравнения, получим:

$$S \cdot \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t} + u \cdot S \cdot \frac{\partial(\rho)}{\partial x} + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial(S)}{\partial x} = 0 \text{ или}$$

$$S \cdot \left(\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial(\rho)}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} \right) = -\rho \cdot u \cdot \frac{\partial(S)}{\partial x} - \rho \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t} \quad \text{или}$$

$$\frac{d(\rho)}{dt} + \rho \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} = -\rho \cdot u \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial x} - \rho \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t}, \text{ где, как обычно, } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x}.$$

Выпишем теперь все преобразованные уравнения системы (1.13) вместе

$$\frac{d(\rho)}{dt} + \rho \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} = -\rho \cdot u \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial x} - \rho \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t} \quad (1.15.1)$$

$$\rho \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial(p)}{\partial x} = 0 \quad (1.15.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t} \quad (1.15.3)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right) \text{ или } p = A(s, p_0, \rho_0, s_0, c_v, \gamma) \cdot \rho^\gamma \quad (1.15.4)$$

Система уравнений (1.15.1)-(1.15.4) – система 4-х уравнений относительно 4-х неизвестных ρ, u, p, s , где $S = S(t, x)$ – заданная функция, $p_0, \rho_0, s_0, c_v, \gamma$ – известные

постоянные значения соответствующих величин. Как видно, первое и третье уравнения системы в отличие от второго имеют ненулевые правые части. Первое уравнение – закон сохранения массы – не зависит от S только для случаев, когда $S = const$. Второе уравнение – уравнение импульсов - не содержит в себе зависимости от S и в точности совпадает с уравнением импульсов в модели Эйлера, как - будто бы и нет переменного сечения у канала. Третье уравнение – уравнение энергии – зависит от S только для случаев, когда $\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$, т. е. когда стенки канала подвижны. Поэтому для случая, когда

стенки канала неподвижны, сам собой напрашивается вывод, что решение задачи в части импульса и энергии не зависит от геометрии канала. Конечно же, этот вывод ошибочный, поскольку уравнения системы решаются не по отдельности, а в системе. А т. к. решение уравнения неразрывности (1.15.1) для плотности зависит от геометрии канала, и, следовательно, через плотность решения уравнений импульса (1.15.2) и энергии (1.15.3) также зависят от геометрии канала.

Отметим еще одно важное свойство системы (1.15) для случая, когда стенки канала

неподвижны, т. е. для случая $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$:

тогда из уравнения (1.15.3) следует, что $\frac{ds}{dt} = 0$, т. е. энтропия каждой индивидуальной (лагранжевой) частицы сплошной среды постоянна вдоль траектории (такие течения получили название - изоэнтропических). При этом если течение проходит через общую “эйлерову” область пространства, где энтропия постоянна $s = s_0$, то она будет таковой и во всех других областях. Такие течения называются гомоэнтропическими (или одноэнтропическими) и тогда во всей области течения как прямое следствие (1.15.4) выполняется соотношение

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \tag{1.16}$$

имеющее название уравнения адиабаты Пуассона.

Для гомоэнтропических течений справедливо во всей области течения условие $ds = 0$.

Но из (1.15.4) следует, что $p = p(\rho, s)$ и тогда в случае $ds = 0$ получим во всей области

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Big|_s \cdot d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \Big|_\rho \cdot ds = c^2 \cdot d\rho, \tag{1.17}$$

где использовано определение $c^2 \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Big|_{s = const}$ (1.18)

В дальнейшем мы покажем, что c - это скорость распространения малых возмущений, т. е. скорость звука.

Т. е. для гомоэнтропических течений $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$, т.к. выполнено условие баротропии

$$p = p(\rho, s_0).$$

С/у. (1.15) в этом случае, благодаря $\frac{d(p)}{dt} = \frac{d(p)}{d\rho} \frac{d(\rho)}{dt} = c^2 \cdot \frac{d(\rho)}{dt}$; $\Rightarrow \frac{d(\rho)}{dt} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d(p)}{dt}$

существенно упрощается до двух уравнений вида

$$\frac{d(p)}{dt} + c^2 \cdot \rho(p) \cdot \frac{\partial(u)}{\partial x} = -\rho(p) \cdot u \cdot c^2 \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial x} \quad (1.19.1)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho(p)} \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x} = 0 \quad (1.19.2)$$

относительно двух переменных u, p . Функции $\rho(p), c(p)$ - известные заданные функции.

$$\rho(p) = \left(\frac{p}{A(s_0, p_0, \rho_0, s_0, c_V, \gamma)} \right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

$$c^2(p) = \gamma \cdot \frac{p}{\rho(p)} = \gamma \cdot \left(\frac{p}{A(s_0, p_0, \rho_0, s_0, c_V, \gamma)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (1.19.3)$$

Функция $S(x)$ определена геометрией нашей задачи. Система уравнений (1.19) несмотря на существенные упрощения по-прежнему остается нелинейной. Нахождение ее решения для конкретных начальных и граничных условий является непростой задачей.

Дальнейшее упрощение системы уравнений (1.19) возможно путем **линеаризации** входящих в ее состав уравнений. Метод линеаризации был разработан в те годы, когда уровень развития численных методов и вычислительной техники не позволяли решать многие практически важные задачи. Поэтому метод линеаризации послужил основой для приближенного моделирования при изучении особенностей поведения движения газа, направленной на выяснение определенных закономерностей, которые могут быть достаточно просто описаны в аналитической форме. С точки зрения исходных нелинейных уравнений эти закономерности принадлежат точным решениям, а приближенные решения выступают как их упрощенные асимптотические описания. Общая схема такого подхода состоит в том, что **в уравнения и в решение вводится некоторый малый параметр δ , от которого описание рассматриваемой особенности не зависит, и оцениваются порядки малости членов уравнений при $\delta \rightarrow 0$** . Если в уравнениях возникают слагаемые с различными показателями степени δ , то в каждом уравнении удерживаются только те из них, которые имеют наименьшую степень малого параметра δ . Это и дает искомые приближенные уравнения. Понятно, что указанная процедура является в значительной мере формальной. Математический идеал требует доказательства того, что решение полных уравнений при $\delta \rightarrow 0$ действительно имеет решение приближенных уравнений в качестве главного члена (хотя бы асимптотически). На самом деле этот идеал достигается весьма в редких случаях; обычно исследователи ограничиваются формальным построением только приближенной модели. Обоснование же предоставляется физической интуиции, для которой тем самым открывается широкий простор. Ясно, что при этом сильно возрастает роль критерия практики.

Для демонстрации этого важного метода построения приближенных решений выполним **линеаризацию системы (1.15) для течения в канале с неподвижными стенками ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$) термически и калорически совершенного газа :**

Пусть известно некоторое **основное движение газа, т.е. точное решение** системы уравнений квазиодномерной газовой динамики **(1.15):**

$$\rho = \tilde{\rho}(t, x), \quad u = \tilde{u}(t, x), \quad p = \tilde{p}(t, x), \quad s = \tilde{s}(t, x) \quad (1.20)$$

Ищется другое, мало отличающееся от (1.20), решение вида

$$\rho = \tilde{\rho}(t, x) + \delta \cdot \rho', u = \tilde{u}(t, x) + \delta \cdot u', p = \tilde{p}(t, x) + \delta \cdot p', s = \tilde{s}(t, x) + \delta \cdot s', \quad (1.21)$$

где штрихом обозначены новые неизвестные функции (добавки к основному решению или его возмущения) переменных t, x , а $\delta \ll 1$ - некоторый малый параметр. Подставим (1.21) в (1.15) и, раскрыв соответствующие произведения функций и их производных, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \delta \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \delta \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \delta^2 \cdot u' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \tilde{p} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \delta \cdot \tilde{p} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta \cdot \rho' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \\ + \delta^2 \cdot \rho' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} = -\tilde{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \delta \cdot \tilde{\rho} \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \delta \cdot \rho' \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \delta^2 \cdot \rho' \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.22.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \delta \cdot \frac{\partial u'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \delta \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \delta^2 \cdot u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\rho} + \delta \cdot \rho'} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \delta \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.22.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \delta \cdot \frac{\partial s'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} + \delta \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial s'}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} + \delta^2 \cdot u' \cdot \frac{\partial s'}{\partial x} = 0 \quad (1.22.3)$$

$$\frac{\tilde{p} + \delta \cdot p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho} + \delta \cdot \rho'}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} + \delta \cdot s' - s_0}{c_V} \right) \text{ или, после небольших преобразований,}$$

$$\frac{\tilde{p}}{p_0} + \delta \cdot \frac{p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \left(1 + \delta \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \exp \left(\delta \cdot \frac{s'}{c_V} \right) \text{ и далее, разлагая в правой}$$

части в ряд Тейлора по малому параметру δ члены, содержащие δ , получим

$$\frac{\tilde{p}}{p_0} + \delta \cdot \frac{p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \left(1 + \gamma \cdot \delta \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} + o(\delta) \right) \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{s'}{c_V} + o(\delta) \right) \text{ или, раскрывая}$$

скобки и приводя подобные члены,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}}{p_0} + \delta \cdot \frac{p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) + \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \left(\gamma \cdot \delta \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} + \delta \cdot \frac{s'}{c_V} + \right. \\ \left. + \gamma \cdot \delta^2 \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \cdot \frac{s'}{c_V} + o(\delta) \right) \end{aligned} \quad (1.22.4)$$

Далее: 1). Вычтем почленно из каждой части уравнений (1.22.1)-(1.22.4) соответствующее уравнение системы (1.15), выполненное на ее решении (1.20).

2). Сократим оставшиеся после вычитания в уравнениях (1.22.1)-(1.22.4) слагаемые на малый параметр δ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \tilde{p} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \delta \cdot \rho' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} = -\tilde{\rho} \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \\ - \rho' \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \delta \cdot \rho' \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.23.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\rho'}{\tilde{\rho} \cdot (\tilde{\rho} + \delta \cdot \rho')} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\rho} + \delta \cdot \rho'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1.23.2)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial s'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} + \delta \cdot u' \cdot \frac{\partial s'}{\partial x} = 0 \quad (1.23.3)$$

$$\frac{p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \left(\gamma \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} + \frac{s'}{c_V} + \gamma \cdot \delta \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \cdot \frac{s'}{c_V} + \underline{Q}(\delta) \right) \quad (1.23.4)$$

Из вида системы (1.23.1)-(1.23.4) ясно, что на самом деле возмущения ρ', u', p', s' должны зависеть не только от переменных t, x , но также и от параметра δ . Главная трудность дальнейшего анализа состоит в оправдании следующего предположения: функции ρ', u', p', s' , как решения системы (1.23.1)-(1.23.4), а также входящие в эти уравнения их производные имеют конечные предельные значения при $\delta \rightarrow 0$.

Если это предположение оправдано, то переход к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в уравнениях (1.23.1)-(1.23.4) приводит к следующей **системе уравнений для возмущений** основного движения:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \tilde{\rho} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -\tilde{\rho} \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} - \rho' \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \quad (1.24.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\rho'}{\tilde{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1.24.2)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \frac{\partial s'}{\partial x} + u' \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} = 0 \quad (1.24.3)$$

$$\frac{p'}{p_0} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \left(\gamma \cdot \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} + \frac{s'}{c_V} \right) = \frac{\tilde{c}^2}{p_0} \cdot \rho' + \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{\tilde{s} - s_0}{c_V} \right) \cdot \frac{s'}{c_V} \quad (1.24.4)$$

Описанная выше процедура вывода системы уравнений (1.24) называется линеаризацией исходных уравнений (1.15), т. к. уравнения системы (1.24) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно искомым функций ρ', u', p', s' . Необходимо иметь в виду, что при рассмотрении краевых задач дополнительные условия также подвергаются аналогичной процедуре линеаризации. Привлекательность процедуры линеаризации обусловлена следующими свойствами линейных уравнений:

1. Если имеется несколько частных решений, то любая их линейная комбинация также есть решение. Напр., если $\rho'_1, u'_1, p'_1, s'_1$ и $\rho'_2, u'_2, p'_2, s'_2$ - частные решения, то $\alpha_1 \cdot \rho'_1 + \alpha_2 \cdot \rho'_2$, $\alpha_1 \cdot u'_1 + \alpha_2 \cdot u'_2$, $\alpha_1 \cdot p'_1 + \alpha_2 \cdot p'_2$, $\alpha_1 \cdot s'_1 + \alpha_2 \cdot s'_2$ - тоже есть решение.
2. Для линейных уравнений с постоянными коэффициентами дифференциал от частного решения, если он существует и существуют все производные, входящие в уравнения, также как и интеграл от частного решения есть решение.

Рассмотрим важный частный случай с/ур. (1.24) когда **в качестве основного движения берется постоянное решение системы (1.15), соответствующее состоянию**

покоящегося газа: $\tilde{\rho}(t, x) = \rho_0$, $\tilde{u}(t, x) = u_0 = 0$, $\tilde{p}(t, x) = p_0$, $\tilde{s}(t, x) = s_0$,

(1.25.0)

Пусть при этом ищутся только одноэнтальпические возмущения, т. е. $s' = 0$; Тогда система уравнений (1.24) примет вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} = -\rho_0 \cdot u' \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \quad (1.25.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1.25.2)$$

$$p' = c_0^2 \cdot \rho' \quad (1.25.4)$$

Заметим, что когда невозмущенное состояние однородно – как в нашем случае (1.25.0), то система уравнений (1.25) может быть записана в исходных переменных задачи

$u = u_0 + \delta \cdot u' = \delta \cdot u'$, $\rho = \rho_0 + \delta \cdot \rho'$, $p = p_0 + \delta \cdot p'$, т. е. в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho_0 \cdot u \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \quad (1.25.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.25.6)$$

$$p - p_0 = c_0^2 \cdot (\rho - \rho_0) \quad (1.25.7)$$

Подстановка (1.25.7) в (1.25.5) приводит к системе 2-х линейных ур/ч/п. 1-ого порядка для двух функций $u = \delta \cdot u'$, $p = p_0 + \delta \cdot p'$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot u \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x}, \quad (1.26.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.26.2)$$

где c_0 , ρ_0 - константы.

Система уравнений (1.26) в каждом уравнении содержит обе искомые функции, путем перекрестного дифференцирования и исключения одной из искомых функций в каждом уравнении мы можем перейти к системе 2-х уравнений 2-ого порядка для каждой искомой функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \right) \right), \quad (1.27.1)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \right), \quad (1.27.2)$$

уравнения вида (1.27) получили название **волновых уравнений**. Нетрудно убедиться, что согласно (1.25.4) аналогичному волновому уравнению удовлетворяет и возмущение плотности ρ :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \right), \quad (1.27.3)$$

Система уравнений (1.27), так же, как и ее исходная форма записи (1.26) с уравнением (1.25.4), получила название системы уравнений акустики. Причем в зависимости от вида функции $S = S(x)$ уравнения акустики описывают распространение плоских волн (

$S = const$), сферических волн ($S = x^2$). Покажем теперь, что для решения задачи акустики фактически достаточно лишь знать решение одного волнового уравнения для потенциала скорости ϕ , а искомые возмущения $\rho - \rho_0$, $p - p_0$, u находятся как дифференциальные

следствия по известной зависимости $\phi = \phi(t, x)$. Для этого проинтегрируем уравнение импульсов (1.26.2) по времени t :

$$u = \hat{u}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \int_{t_0}^t (p - p_0) dt \right) \quad (1.28)$$

в (1.28) $\hat{u}(x)$ - произвольная функция, появившаяся в процессе интегрирования. Обычно в задачах акустики $\hat{u}(x)$ можно положить равной нулю (напр., это так, если в начальный момент времени t_0 среда находилась в состоянии покоя ρ_0 , $u_0 = 0$, p_0 или если волны распространяются в область покоя). При этом вектор скорости является градиентом скаляра (в нашем одномерном случае – частной производной), т.е. течение является потенциальным, и, как следствие, получаем цепочку дифференциальных соотношений:

$$u = \frac{\partial(\phi)}{\partial x}, \quad p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial(\phi)}{\partial t}, \quad \rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial(\phi)}{\partial t} \quad (1.29.1)$$

Отметим, что второе соотношение в (1.29.1) представляет собой интеграл Коши-Лагранжа для линеаризованного течения на фоне покоящейся среды.

Подставляя (1.29.1) в линеаризованное уравнение неразрывности (1.26.1) получим **волновое уравнение** для нахождения $\phi = \phi(t, x)$ в одномерном случае:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \right), \quad (1.29.2)$$

Уравнение (1.29.2) для случаев плоских ($S = const$) и сферических волн ($S = x^2$) интегрируется в конечном виде, т.е. может быть найдено его общее решение.

Общее решение волнового уравнения для случая плоских волн.

Рассмотрим вначале случай плоских ($S = const$) волн. Тогда волновое уравнение (1.29.2)

$$\text{примет вид: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.30.0)$$

Введем новые независимые переменные, получившие название характеристических переменных, $\xi = x - c_0 t$, $\eta = x + c_0 t$. (1.30.1)

Заметим, что якобиан преобразования (1.30.1) не вырожден для любых значений t, x и равен по величине $2c_0$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c_0 \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)$$

Вторая производная

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right].$$

Аналогично

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}$. Подставляя в (1.30.0) найденные значения вторых

производных получим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4c_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0 \Rightarrow$$

интегрируя по η , получим $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = F(\xi)$.

Проинтегрируем получившееся уравнение по ξ , получим

$$\phi = \int F(\xi) d\xi + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\phi = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (1.30.2)$$

где $f(\xi), g(\eta)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Это решение было получено Ж. Д'Аламбером в 1747 г. и является комбинацией (наложением) прямой и обратной волн: одна волна неизменной формы, описываемой функцией f , движется вправо со скоростью c_0 , а другая с формой, описываемой функцией g , движется влево с такой же скоростью c_0 . Действительно, полагая в найденных решениях $f(\xi), g(\eta)$ значения их аргументов равными константе

$\xi = const, \eta = const$, получим две системы плоских волн:

$$C_+ : x - c_0 t = const, \quad C_- : x + c_0 t = const, \quad (1.30.3)$$

представляющих две движущиеся в противоположные стороны со скоростью c_0 перпендикулярные оси Ox плоскости, каждая из которых несет постоянные, заданные начальными условиями значения возмущений скорости, давления, плотности или температуры. С геометрической точки зрения полученное решение можно интерпретировать как наличие в фазовой плоскости (t, x) двух семейств прямых (1.30.3) с угловыми коэффициентами $\pm c_0$, обладающих тем свойством, что **вдоль каждой из этих прямых сохраняются постоянные значения заданных начальными условиями возмущений скорости, давления, плотности или температуры**. Эти два семейства прямых C_+, C_- называются **характеристиками волнового уравнения** (1.30.0) в фазовой плоскости.

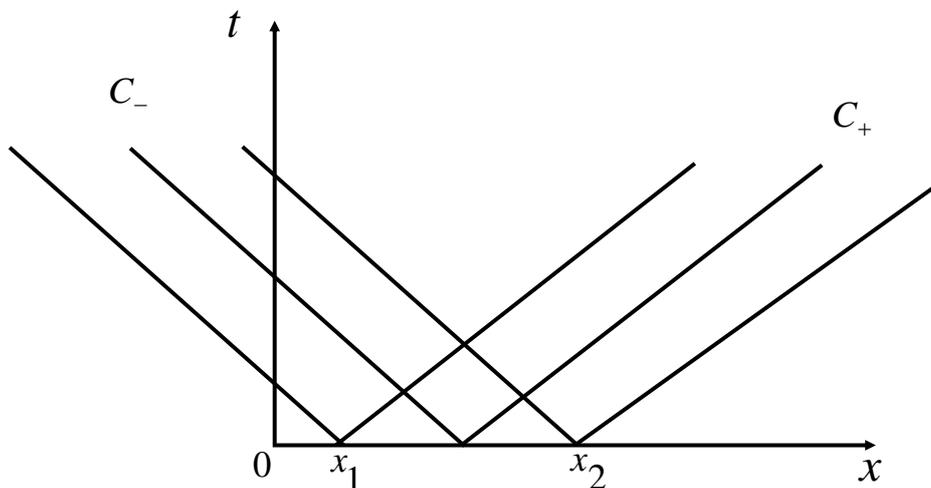


Рис. 1.2

Получим теперь соответствующие найденному общему решению выражения для возмущений скорости и давления:

$$u(t, x) = f'(x - c_0 t) + g'(x + c_0 t),$$

$$p(t, x) - p_0 = \rho_0 \cdot c_0 \cdot (f'(x - c_0 t) - g'(x + c_0 t)),$$

где $f'(x - c_0 t)$ обозначает обыкновенную производную $\frac{d f(x - c_0 t)}{d(x - c_0 t)}$ функции $f(x - c_0 t)$ по

аргументу $x - c_0 t$ и аналогично для функции g .

Обозначим $f'(x - c_0 t) = F(x - c_0 t)$, $g'(x + c_0 t) = G(x + c_0 t)$.

Тогда в новых обозначениях $u(t, x) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t)$

$$p(t, x) - p_0 = \rho_0 \cdot c_0 \cdot (F(x - c_0 t) - G(x + c_0 t)),$$

где $F(\xi)$, $G(\eta)$ - произвольные один раз непрерывно дифференцируемые функции.

Полученные выражения для возмущений скорости и давления – суть общее решение системы уравнений (1.26) для плоского случая $S(t, x) = const$.

Общее решение волнового уравнения в сферически-симметричном случае.

Рассмотрим теперь сферический ($S = x^2$) случай, т. е. случай волн симметричных относительно начала координат, здесь x - расстояние от центра (начала координат). В этом случае волновое уравнение (1.29.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{2}{x} \right), \quad (1.33.0)$$

Любопытно, что это уравнение можно преобразовать к уже исследованному виду (1.30.0) относительно новой искомой функции $\phi \cdot x$:

$$\frac{\partial^2 (\phi \cdot x)}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 (\phi \cdot x)}{\partial x^2}, \quad (1.33.1)$$

общее решение которого нам уже известно:

$$\phi = \frac{f(x - c_0 t)}{x} + \frac{g(x + c_0 t)}{x} \quad (1.33.2)$$

Т.о. формула (1.33.2) дает общее решение для сферически-симметричного случая.

Задача Коши для волнового уравнения в случае плоских волн.

Полученные точные общие решения волнового уравнения безусловно имеют огромную важность для дальнейшего изучения свойств волнового уравнения. Следующим этапом является постановка и решение задачи Коши для волнового уравнения (1.30.0) в случае плоских волн. Итак, рассматривается уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \text{где } t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.34.1)$$

с начальными условиями вида

$$\phi(0, x) = \psi(x) \quad (1.34.2)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi(x), \quad \text{где } t=0, \quad -\infty < x < +\infty$$

Наличие в волновом уравнении производной второго порядка по времени обязывает нас ставить начальные условия не только на искомую функцию, но и на первую производную по времени.

Допустим теперь, что решение задачи (1.34.1), (1.34.2) существует, тогда оно дается формулой $\phi = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$. Определим функции f, g таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$\phi(0, x) = f(x) + g(x) = \psi(x), \quad (1.34.3)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = -c_0 \cdot f'(x) + c_0 \cdot g'(x) = \Phi(x), \quad (1.34.4)$$

Интегрируя второе равенство (1.34.4), получаем (x_0, C - постоянные):

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^x \Phi(z) dz + C \quad (1.34.5)$$

Рассматривая (1.34.3), (1.34.5) как систему 2-х уравнений относительно 2-х неизвестных f, g находим:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \cdot \psi(x) - \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^x \Phi(z) dz - \frac{C}{2} \\ g(x) = \frac{1}{2} \cdot \psi(x) + \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^x \Phi(z) dz + \frac{C}{2} \end{cases} \quad (1.34.6)$$

Таким образом, мы определили функции f, g через заданные функции ψ, Φ , причем равенства (1.34.6) должны иметь место для любого значения аргумента функций f, g .

Подставив в формулу общего решения $\phi = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$ найденные значения f, g (формулы (1.34.6)), получим

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \left[\int_{x_0}^{x+c_0 t} \Phi(z) dz - \int_{x_0}^{x-c_0 t} \Phi(z) dz \right]$$

или

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \Phi(z) dz. \quad (1.35)$$

Впервые это решение задачи Коши для волнового уравнения получил Л. Эйлер в 1748 г. Сейчас выполним проверку найденного решения в предположении, что ψ - дважды дифференцируемая функция и Φ - один раз дифференцируемая функция своего аргумента:

1. Решение удовлетворяет волновому уравнению, так как любая дважды дифференцируемая функция ψ и интеграл от один раз дифференцируемой функции Φ от своих аргументов $x - c_0 t$ и $x + c_0 t$ есть решение волнового уравнения.

2. Решение удовлетворяет начальным данным задачи Коши. Действительно,

$$\phi(0, x) = \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x-0}^{x+0} \Phi(z) dz = \psi(x), \text{ т. е. первое начальное условие}$$

выполнено при всех x .

Для проверки второго начального условия вспомним формулу вычисления производной от интеграла, зависящего от параметра (правило Лейбница):

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b(t)) \frac{db}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da}{dt}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \right] \Bigg|_{t=0} + \frac{1}{2c_0} [c_0 \Phi(x + c_0 t) - (-c_0) \Phi(x - c_0 t)] \Bigg|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[-c_0 \frac{d\psi(x)}{dx} + c_0 \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + \frac{1}{2c_0} [c_0 \Phi(x) + c_0 \Phi(x)] = \Phi(x) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Отметим, что полученное решение вида (1.35) называется **формулой Д’Аламбера** и доказывает существование решения поставленной задачи Коши. Эта же формула доказывает и единственность решения.

Получим теперь соответствующие найденному решению задачи Коши выражения для возмущений скорости и давления:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) + \frac{1}{2c_0} (\Phi(x + c_0 t) - \Phi(x - c_0 t)) = \\ &= \frac{1}{2} (\psi'(x - c_0 t) + \psi'(x + c_0 t)) + \frac{1}{2c_0} (\Phi(x + c_0 t) - \Phi(x - c_0 t)), \end{aligned} \tag{1.34.7}$$

$$p(t, x) - p_0 = -\rho_0 \cdot \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \right) - \frac{\rho_0}{2c_0} (c_0 \cdot \Phi(x + c_0 t) -$$

$$-(-c_0) \cdot \Phi(x - c_0 t)) = \frac{\rho_0 c_0}{2} (\psi'(x - c_0 t) - \psi'(x + c_0 t)) - \frac{\rho_0}{2} (\Phi(x + c_0 t) + \Phi(x - c_0 t)),$$

символом штрих обозначена обыкновенная производная по переменным $\xi = x - c_0 t$,

$\eta = x + c_0 t$. Найденным выражениям для возмущений скорости и давления соответствуют

следующие начальные данные в задаче Коши для искомых функций u, p :

$$u(0, x) = \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad p(0, x) - p_0 = -\rho_0 \cdot \Phi(x), \quad \text{где } t = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

Физическая интерпретация решения задачи Коши для плоского случая.

Найденная функция
$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz \tag{1.35}$$

представляет процесс распространения начального профиля возмущения и начальной скорости изменения профиля возмущения. Если фиксировать $t = t_0$, то функция $\phi(t_0, x)$ дает профиль возмущения в момент t_0 ; фиксируя $x = x_0$, получим функцию $\phi(t, x_0)$, дающую процесс изменения параметров в точке $x = x_0$. Предположим, что наблюдатель, находившийся в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, движется со скоростью c_0 в положительном направлении. Введем систему координат, связанную с наблюдателем, полагая $t' = t$, $x' = x - c_0 t$. В этой подвижной системе отсчета функция $\phi(t, x) = f(x - c_0 t)$ будет определяться формулой $\phi(t, x) = f(x')$ и наблюдатель все время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $\phi(t, x) = f(x - c_0 t)$ представляет неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо по оси Ox со скоростью c_0 (т. е. бегущую с постоянной скоростью вправо волну неизменной формы). Функция $g(x + c_0 t)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся влево со скоростью c_0 . Т. о., общее решение (1.35) задачи Коши для бесконечного промежутка $-\infty < x < +\infty$ есть суперпозиция двух волн $f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$, одна из которых распространяется вправо со скоростью c_0 , а вторая - влево с той же скоростью. При этом

$$f(x - c_0 t) = \frac{1}{2} \psi(x - c_0 t) + \Psi(x - c_0 t)$$

$$g(x + c_0 t) = \frac{1}{2} \psi(x + c_0 t) + \Psi(x + c_0 t)$$

$$\text{где } \Psi(x) = \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^x \Phi(z) dz.$$

Для выяснения характера решения (1.35) удобно воспользоваться фазовой плоскостью (t, x) . Прямые $C_+ : x - c_0 t = \text{const}$, $C_- : x + c_0 t = \text{const}$ в фазовой плоскости называются характеристиками волнового уравнения. Функции $f(x - c_0 t)$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $C_+ : x - c_0 t = \text{const}$, а функция $g(x + c_0 t)$ постоянна вдоль характеристики $C_- : x + c_0 t = \text{const}$.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведем характеристики семейства

$C_+ : x - c_0 t = x_1, \quad x - c_0 t = x_2$ через концы интервала $(0, x_1)$ и $(0, x_2)$; они разбивают полуплоскость $(t > 0, x)$ на три области: I, II, III (Рис. 1.3).

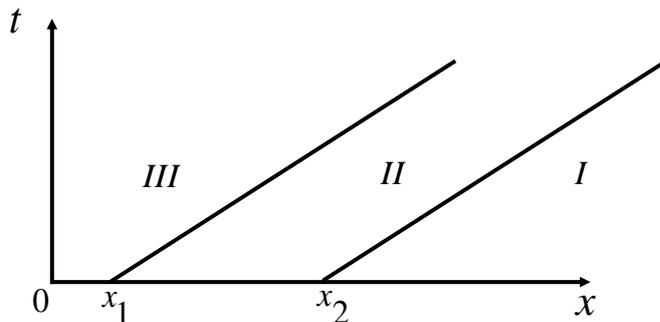


Рис. 1.3

Функция $\phi(t, x) = f(x - c_0 t)$ отлична от нуля только в обл. II, где $x_1 < x - c_0 t < x_2$, а характеристики $x - c_0 t = x_1$, $x - c_0 t = x_2$ представляют собой задний и передний фронты распространяющейся вправо волны.

Рассмотрим теперь некоторую фиксированную точку (t_0, x_0) и проведем из нее обе характеристики $x - c_0 t = x_0 - c_0 t_0$, $x + c_0 t = x_0 + c_0 t_0$, которые пересекут ось Ox в точках $(t = 0, x_1 = x_0 - c_0 t_0)$ $(t = 0, x_2 = x_0 + c_0 t_0)$. Значение функции $\phi(t, x) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$ в точке (t_0, x_0) равно $\phi(t_0, x_0) = f(x_1) + g(x_2)$, т. е. определяется значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ в точках $(0, x_1)$ и $(0, x_2)$, являющихся вершинами треугольника MPQ , образованного двумя характеристиками и осью Ox (Рис. 1.4).

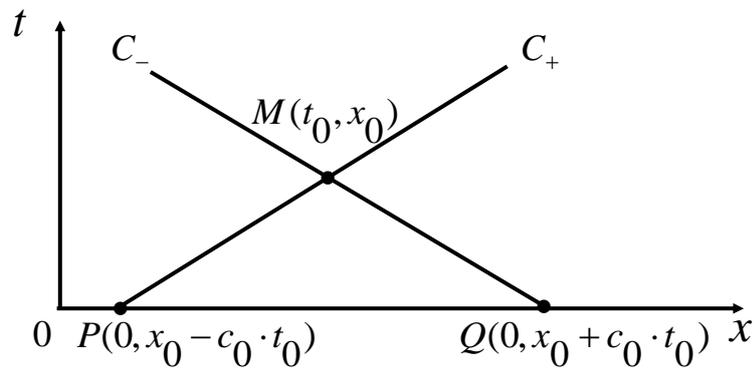


Рис. 1.4

Этот треугольник MPQ называется **характеристическим треугольником** точки (t_0, x_0) . Из формулы (1.35) видно, что величина амплитуды профиля $\phi(t_0, x_0)$ в точке M в момент времени t_0 зависит только от значений начального возмущения в вершинах P и Q характеристического треугольника MPQ и от значений начальной скорости на стороне PQ . Это становится совершенно ясно, если формулу (1.35) записать в виде:

$$\phi(M) = \frac{1}{2} [\psi(P) + \psi(Q)] + \frac{1}{2c_0} \int_{PQ} \Phi(z) dz$$

Начальные данные, заданные вне PQ , не оказывают влияния на значение $\phi(t, x)$ в точке M . Заметим, что, если начальные данные заданы не на всей бесконечной прямой Ox , а на некотором отрезке P_1Q_1 , то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок P_1Q_1 .

Перепишем также формулы (1.34.7) для значений возмущения скорости и давления:

$$u(M) = \frac{1}{2} \left(\psi'(P) - \frac{1}{c_0} \Phi(P) \right) + \frac{1}{2} \left(\psi'(Q) + \frac{1}{c_0} \Phi(Q) \right),$$

$$p(M) - p_0 = \frac{\rho_0 c_0}{2} \left(\psi'(P) - \frac{1}{c_0} \Phi(P) \right) - \frac{\rho_0 c_0}{2} \left(\psi'(Q) + \frac{1}{c_0} \Phi(Q) \right),$$

Видно, что значения возмущений скорости и давления в точке M зависят только от начальных данных в точках P и Q .

Два примера: Решение задачи Коши для волнового уравнения (1.35) можно также представить в виде суммы функций:

$$\phi(t, x) = \phi_1(t, x) + \phi_2(t, x), \quad (1.36)$$

$$\text{где } \phi_1(t, x) = \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)], \quad (1.37)$$

$$\text{где } \phi_2(t, x) = \Psi(x + c_0 t) - \Psi(x - c_0 t) = \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz, \quad (1.38)$$

тогда, если начальная скорость возмущения равна нулю ($\Phi(x) = 0$), то амплитуда возмущения $\phi(t, x) = \phi_1(t, x)$ есть сумма левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $0,5 \cdot \psi(x)$, равной половине начального возмущения. Если же наоборот $\psi(x) = 0$ и $\Phi(x) \neq 0$, то решение $\phi(t, x) = \phi_2(t, x)$ представляет возмущение, создаваемое начальной скоростью.

Пример 1: Рассмотрим распространение начального возмущения $\psi(x) \neq 0$ и $\Phi(x) = 0$, заданного на отрезке $[x_1, x_2]$, при помощи представления решения в виде (1.36). Для этого проведем характеристики обоих семейств через точки $P(0, x_1)$ и $Q(0, x_2)$; они разобьют верхнюю полуплоскость на шесть областей (Рис. 1.5). Величина возмущения для наших начальных данных дается формулой (1.37), т. е. $\phi(t, x) = \phi_1(t, x)$ в любой точке (t, x) . Поэтому в областях I, III, V возмущение равно нулю, т. к. боковые стороны характеристического треугольника для любой точки из этих областей не пересекаются с отрезком PQ, на котором задано начальное возмущение. В области II решением является правая волна

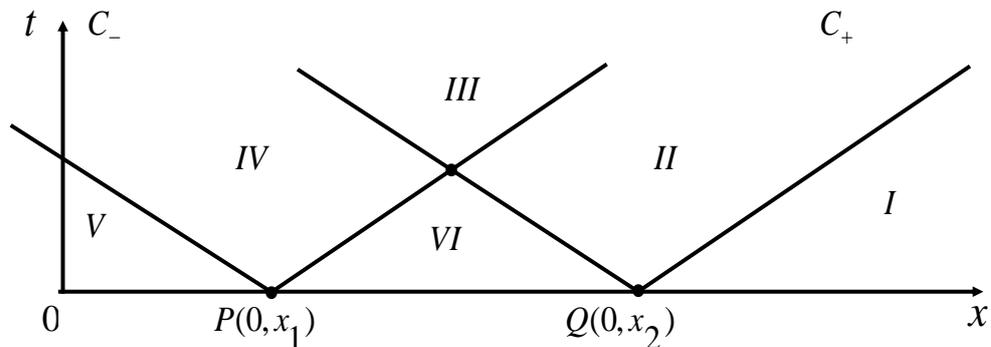


Рис. 1.5

$\phi(t, x) = \frac{1}{2} \psi(x - c_0 t)$, в области IV – левая волна $\phi(t, x) = \frac{1}{2} \psi(x + c_0 t)$, а в области VI

решение есть сумма левой и правой волн. Область, образованная областями II+IV+VI, называется областью влияния начальных данных, заданных на отрезке PQ. (Схематически для случая начального возмущения в форме треугольника последовательные положения профиля волны представлены на Рис. 1.6.1).

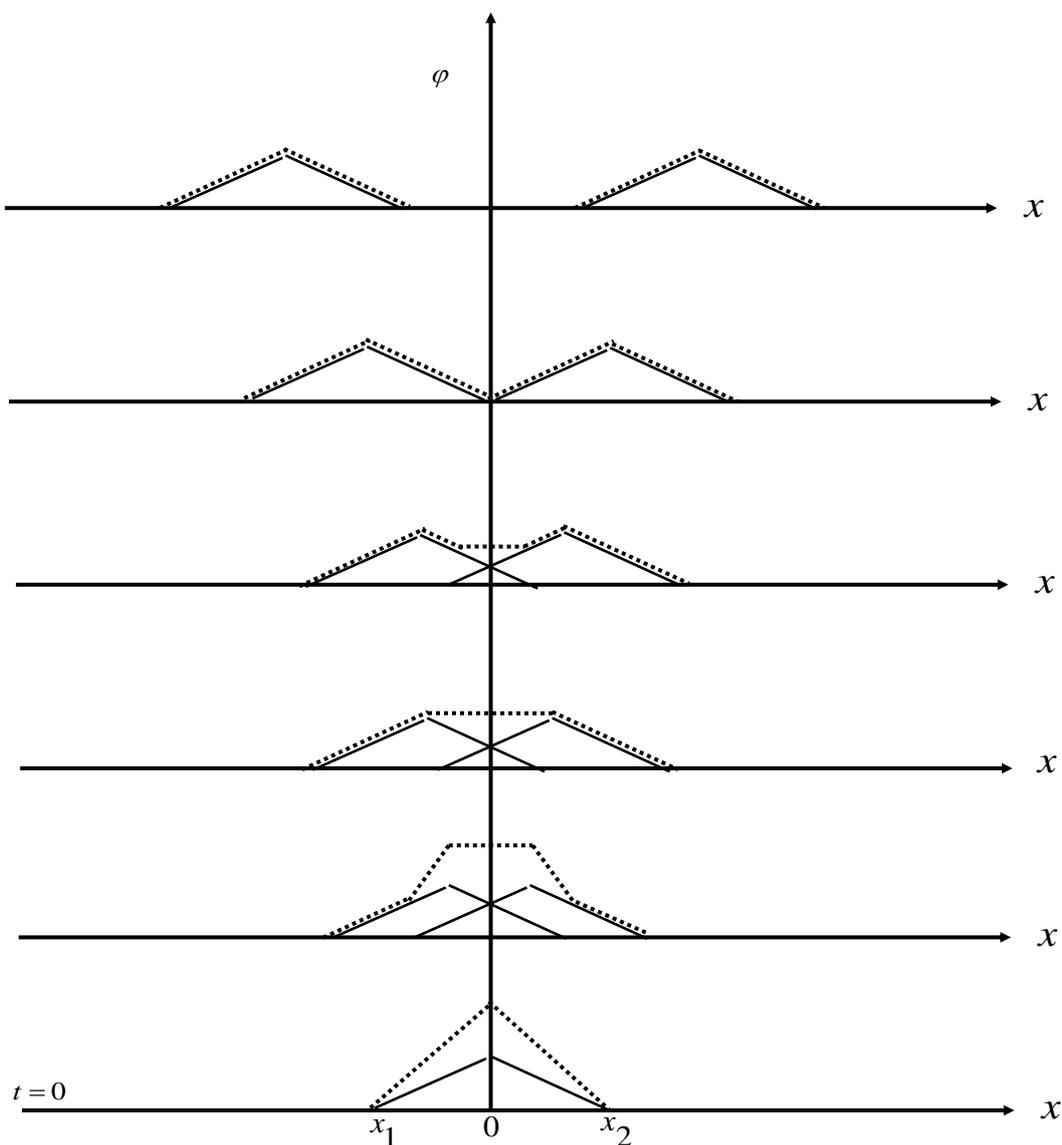


Рис. 1.6.1

Пример 2: Рассмотрим распространение возмущения со следующими начальными данными: начальное возмущение отсутствует ($\psi(x) = 0$), а начальная скорость $\Phi(x)$ отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где она принимает постоянное значение Φ_0 : $\Phi(x) = \Phi_0$ при $x \in [x_1, x_2]$, $\Phi(x) = 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$. В этом случае решением является функция $\phi_2(t, x)$ из (1.36)-(1.38). Вычислим функцию $\Psi(x)$, положив при этом $x_0 = 0$ (график функции дан на Рис. 1.6.2):

$$\Psi(x) = \frac{1}{2c_0} \int_0^x \Phi(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ \frac{x-x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0 & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{x_2-x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0 & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Решение $\phi_2(t, x)$ есть разность правой и левой волн с профилем $\Psi(x)$. Последовательные положения этих волн в моменты времени t_i изображены на Рис. 1.6.3. Изначально нулевой профиль возмущения с ростом времени t приобретает форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени. Заметим, что, если $\Phi(x)$ отлична от постоянной на отрезке $[x_1, x_2]$, то изменится только профиль $\Psi(x)$.

Для выяснения характера полученного решения воспользуемся фазовой плоскостью (t, x) . Напишем выражения для $\phi(t, x) = \phi_2(t, x)$ в различн. областях фазовой пл-ти (Рис. 1.5).

В обл. I. ($x - c_0 t > x_2$): $\Psi(x + c_0 t) = \Psi(x - c_0 t) = const$, $\phi(t, x) = 0$

В обл. V. ($x + c_0 t < x_1$): $\Psi(x + c_0 t) = \Psi(x - c_0 t) = 0$, $\phi(t, x) = 0$

В обл. III. ($x - c_0 t < x_1$, $x + c_0 t > x_2$):

$$\Psi(x + c_0 t) = const = \frac{x_2 - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \Psi(x - c_0 t) = 0, \quad \phi(t, x) = \frac{x_2 - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0$$

В обл. II. ($x_1 < x - c_0 t < x_2$, $x + c_0 t > x_2$):

$$\Psi(x + c_0 t) = const = \frac{x_2 - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \Psi(x - c_0 t) = \frac{x - c_0 t - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \phi(t, x) = \frac{x_2 - (x - c_0 t)}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0$$

В обл. IV. ($x_1 < x + c_0 t < x_2$, $x - c_0 t < x_1$):

$$\Psi(x + c_0 t) = \frac{x + c_0 t - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \Psi(x - c_0 t) = 0, \quad \phi(t, x) = \frac{x + c_0 t - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0$$

В обл. VI. ($x - c_0 t > x_1$, $x + c_0 t < x_2$):

$$\Psi(x + c_0 t) = \frac{x + c_0 t - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \Psi(x - c_0 t) = \frac{x - c_0 t - x_1}{2 \cdot c_0} \cdot \Phi_0, \quad \phi(t, x) = t \cdot \Phi_0$$

В случае задания на отрезке PQ ненулевого значения начальной скорости возмущения (т.е. $\Phi(x) \neq 0$) область влияния включала бы в себя области II+IV+VI и плюс область III.

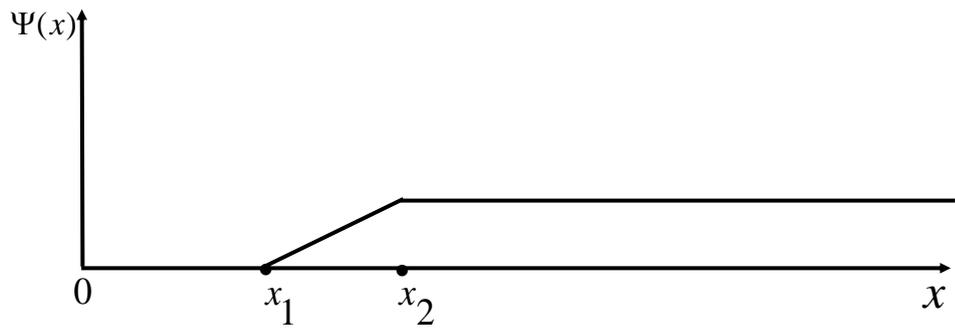


Рис 1.6.2

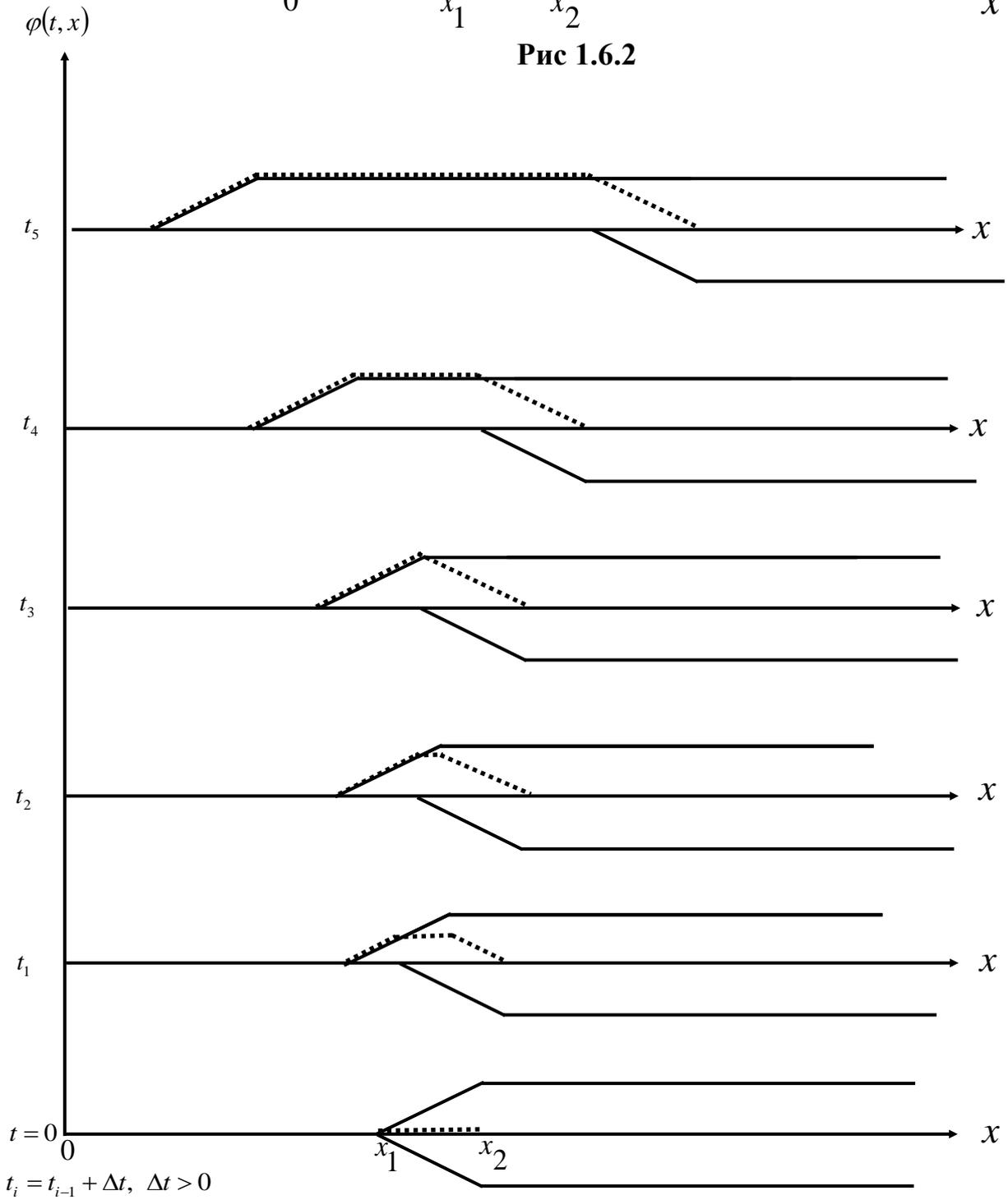


Рис 1.6.4

Понятие устойчивости решения.

Найденное нами решение Д' Аламбера (1.35) задачи Коши для волнового уравнения (1.34.1) однозначно определено начальными условиями (1.34.2). Докажем теперь, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Утверждение: *Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения волнового уравнения (1.34.1) $\phi_1(t, x)$ и $\phi_2(t, x)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться меньше чем на ε :*

$$|\phi_1(t, x) - \phi_2(t, x)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

если только начальные значения

$$\begin{cases} \phi_1(0, x) = \psi_1(x) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(0, x) = \Phi_1(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \phi_2(0, x) = \psi_2(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0, x) = \Phi_2(x) \end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше, чем на δ :

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta; \quad |\Phi_1(x) - \Phi_2(x)| < \delta.$$

Доказательство:

Функции $\phi_1(t, x)$ и $\phi_2(t, x)$ связаны со своими начальными значениями формулой Д' Аламбера (1.35), поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\phi_1(t, x) - \phi_2(t, x)| &\leq \frac{1}{2} |\psi_1(x + c_0 t) - \psi_2(x + c_0 t)| + \frac{1}{2} |\psi_1(x - c_0 t) - \psi_2(x - c_0 t)| \\ &+ \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} |\Phi_1(z) - \Phi_2(z)| dz, \end{aligned}$$

из этой оценки получаем

$$|\phi_1(t, x) - \phi_2(t, x)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2c_0} \cdot \delta \cdot 2c_0 \cdot t \leq \delta \cdot (1 + t_0), \text{ и далее выбор } \delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0} \text{ доказывает}$$

наше утверждение.

Если решение математической задачи непрерывно зависит от дополнительных условий (от начальных, граничных данных и от правой части уравнения – т. е. от исходных данных задачи), то говорят, что задача **устойчива**.

Говорят, что **математическая задача поставлена корректно, если:**

1. решение задачи существует,
2. решение задачи единственно,
3. решение задачи непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

Отметим одно важное обстоятельство. Очевидно, что функция $\phi(t, x)$, определяемая формулой (1.35), может быть решением волнового уравнения только в том случае, если функция $\Phi(x)$ дифференцируема, а функция $\psi(x)$ дифференцируема дважды. Из сказанного ясно, что функции, изображенные на Рис. 1.6, не могут являться решением волнового уравнения, т.к. они не всюду дважды дифференцируемы. Однако если немного

изменить начальные условия (сгладить), заменив их дифференцируемыми функциями $\psi(x)$ и $\Phi(x)$, то этим начальным функциям уже будет соответствовать решение волнового уравнения (1.34.1). Кроме того заметим, что при доказательстве утверждения настоящего пункта мы фактически доказали, что функции, определяемые формулой (1.35), непрерывно зависят от начальных функций $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Т. о., если некоторым функциям $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ не соответствует решение волнового уравнения, удовл. нач. усл. (1.34.2), то функция, определяемая формулой (1.35), является пределом решений волнового уравнения с немного сглаженными начальными условиями. Полученные таким предельным переходом функции называются **обобщенными решениями**, понятие которых было введено С.Л. Соболевым.

Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений.

Рассмотрим задачу Коши о распространении волн на полуограниченной прямой ($x \geq 0$). Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от границы рассматриваемой области поиска решения.

Постановка задачи:

Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \text{где } t > 0, \quad 0 < x < +\infty$$

(1.40.1)

с начальными условиями

$$\begin{cases} \phi(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}, \quad \text{где } t = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

(1.40.2)

и с граничным условием

$$\phi(t, 0) = \mu(t) \quad (\text{или } \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = \nu(t)), \quad \text{где } t \geq 0$$

(1.40.3)

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия, т. е.

$$\phi(t, 0) = 0 \quad (\text{или } \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = 0), \quad \text{где } t \geq 0$$

(1.40.4)

Для построения решения докажем 2 свойства решений волнового уравнения для случая бесконечной прямой:

1. Если начальные данные в задаче о распространении возмущений на неограниченной прямой (задача (1.34.1), (1.34.2)) являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0 , то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.
2. Если начальные данные в задаче о распространении возмущений на неограниченной прямой (задача (1.34.1), (1.34.2)) являются четными функциями относительно некоторой точки x_0 , то производная по x соответствующего решения в этой точке x_0 равна нулю.

Док-во св-ва 1: Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. Тогда условия нечетности нач. данных примут вид: $\psi(x) = -\psi(-x)$, $\Phi(x) = -\Phi(-x)$.

Решение (1.35) при $x = 0, t > 0$ равно

$$\phi(t, 0) = \frac{1}{2} [\psi(-c_0 t) + \psi(c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{-c_0 t}^{c_0 t} \Phi(z) dz = 0,$$

т.к. оба слагаемых равны нулю в виду нечетности функций $\psi(x)$, $\Phi(x)$ и симметрии интервалов.

Док-во св-ва 2: Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. Тогда условия четности нач.

данных примут вид: $\psi(x) = \psi(-x)$, $\Phi(x) = \Phi(-x)$. Заметим также, что производная четной функции является нечетной функцией $\psi'(x) = -\psi'(-x)$. Тогда из формулы (1.35)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = \frac{1}{2} [\psi'(-c_0 t) + \psi'(c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} [\Phi(c_0 t) - \Phi(-c_0 t)] = 0,$$

т. к. первое слагаемое равно нулю в силу нечетности производной $\psi'(x)$, а второе - в виду четности $\Phi(x)$.

Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Д' Аламбера (1.35) и не связано с двукратной дифференцируемостью функции $\phi(t, x)$. Тем самым доказано, что свойство 1 верно для любых функций, представимых формулой Д' Аламбера, а свойство 2 – для функций того же вида с дифференцируемой функцией $\psi(x)$, т. е. для обобщенных решений задачи (1.34.1), (1.34.2).

Указанные свойства помогут теперь решить **первую краевую задачу**:

Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \text{где } t > 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \phi(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}, \quad \text{где } t = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

и граничному условию $\phi(t, 0) = 0$, где $t \geq 0$.

Рассмотрим функции $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)$, являющиеся нечетным продолжением функций $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ на отрицательную часть оси абсцисс.

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \geq 0 \\ -\Phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\tilde{\psi}(x - c_0 t) + \tilde{\psi}(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \tilde{\Phi}(z) dz$$

она определена для всех $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, т.е. на всей прямой. В силу св-ва 1 имеем $\phi(t, 0) = 0$. Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t = 0, x > 0$ следующим начальным

условиям:
$$\begin{cases} \phi(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \end{cases}$$
 . Рассматривая теперь полученную функцию $\phi(t, x)$

только для значений $t \geq 0, x \geq 0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, мы получим окончательный вид решения:

$$\phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\psi(x + c_0 t) + \psi(x - c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz & \text{при } x - c_0 t \geq 0, x > 0 \\ \frac{1}{2} [\psi(x + c_0 t) - \psi(c_0 t - x)] + \frac{1}{2c_0} \int_{c_0 t - x}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz & \text{при } x - c_0 t < 0, x > 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

Из (1.41) видно, что в области $x - c_0 t > 0, x > 0$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $\phi(t, x)$ совпадает с решением для случая бесконечной прямой. На Рис. 1.7 представлены для сравнения области влияния начальных и граничных данных.

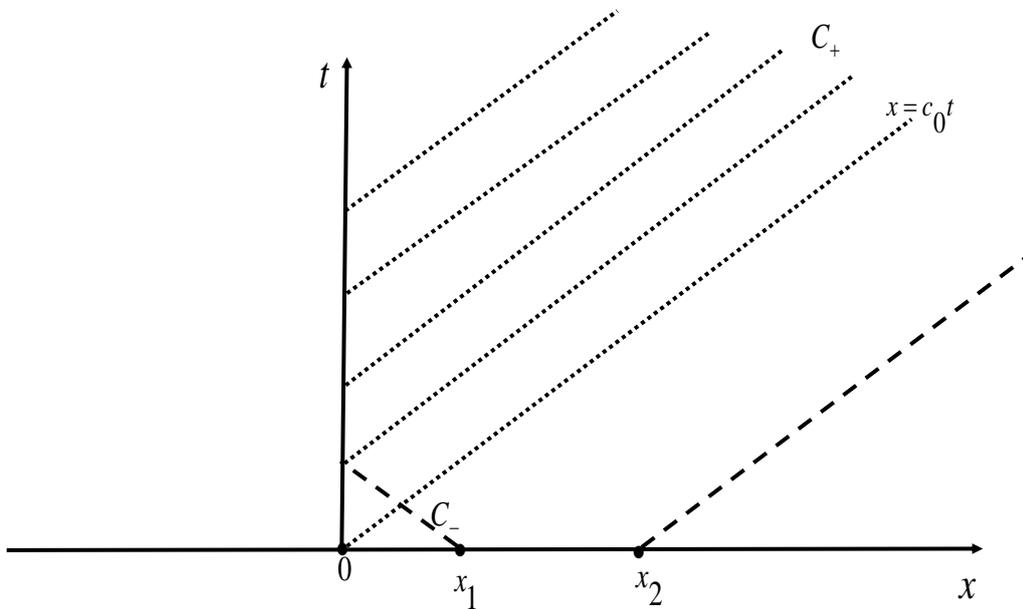


Рис. 1.7

Аналогично, если при $x = 0$ мы имеем свободный конец: $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = 0$,

То, взяв четное продолжение функций $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ на отрицательную часть оси абсцисс

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \geq 0 \\ \Phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

получим решение волн. уравн.:
$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\tilde{\psi}(x - c_0 t) + \tilde{\psi}(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \tilde{\Phi}(z) dz$$

или, возвращаясь к исходным функциям, получим:

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz & \text{при } x - c_0 t > 0, x > 0 \\ \frac{1}{2} [\psi(x + c_0 t) + \psi(c_0 t - x)] + \frac{1}{2c_0} \left\{ \int_0^{x + c_0 t} \Phi(z) dz + \int_0^{c_0 t - x} \Phi(z) dz \right\} & \text{при } x - c_0 t < 0, x > 0 \end{cases}$$

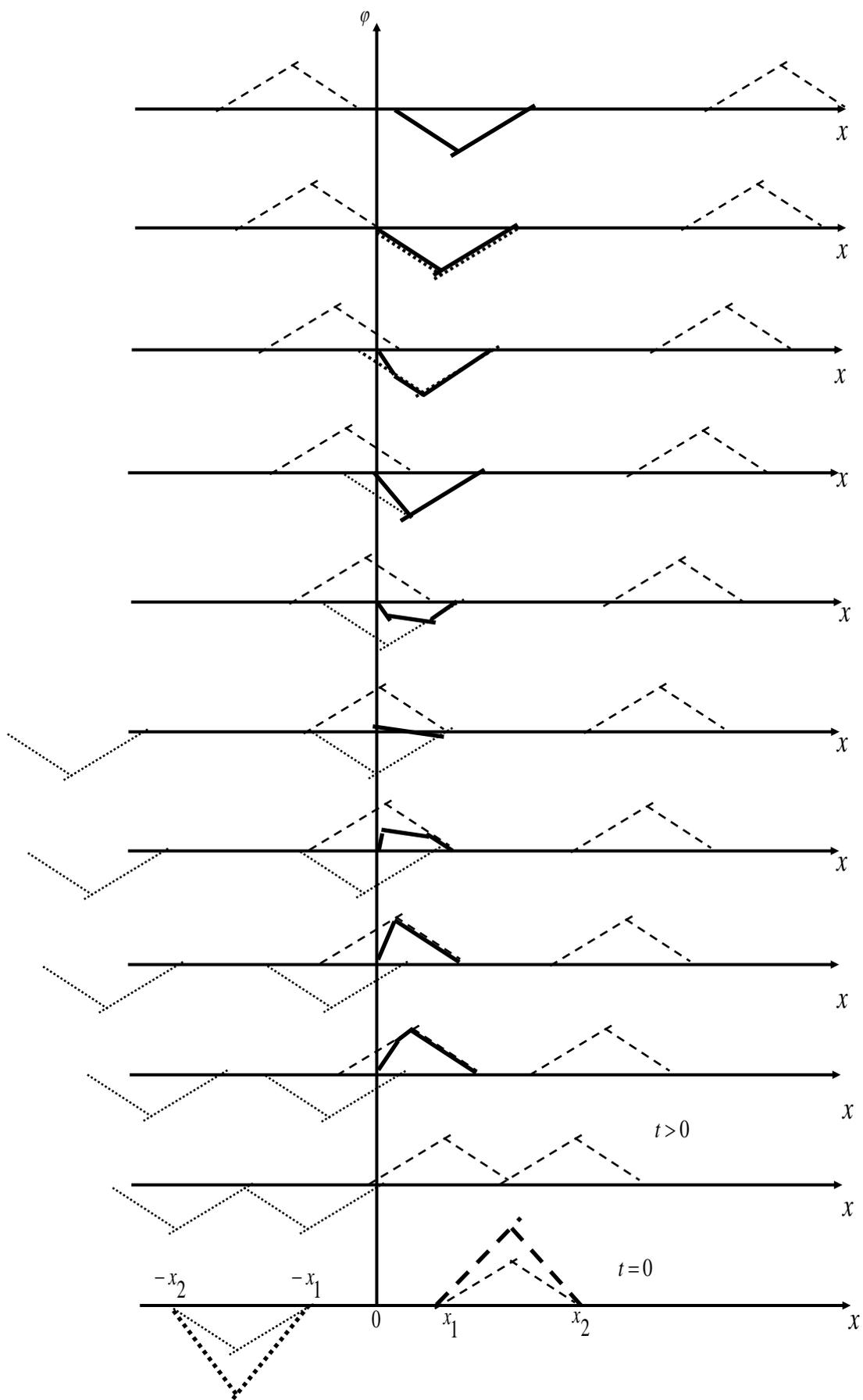


Рис 1.8

Рассмотрим теперь два примера.

Пример 1. На Рис 1.8 представлен процесс распространения волны для случая полуограниченной прямой, закрепленной при $x = 0$, когда начальные данные на полуограниченной прямой отличны от нуля только в промежутке (x_1, x_2) , в котором начальное возмущение $\psi(x)$ изображается равнобедренным треугольником, а начальная скорость возмущения $\Phi(x) = 0$. На Рис. 1.8 в деталях представлен процесс отражения волны от левого закрепленного конца (левой жесткой стенки). Как видно из Рис. 1.8 при $x = 0$ обеспечено выполнение условия $\phi(t, 0) = 0$ для $t \geq 0$ и в результате отражения амплитуда возмущения меняет свой знак.

На Рис 1.9 для этого же случая в фазовой плоскости представлена характеристическая картина распространения и отражения возмущений.

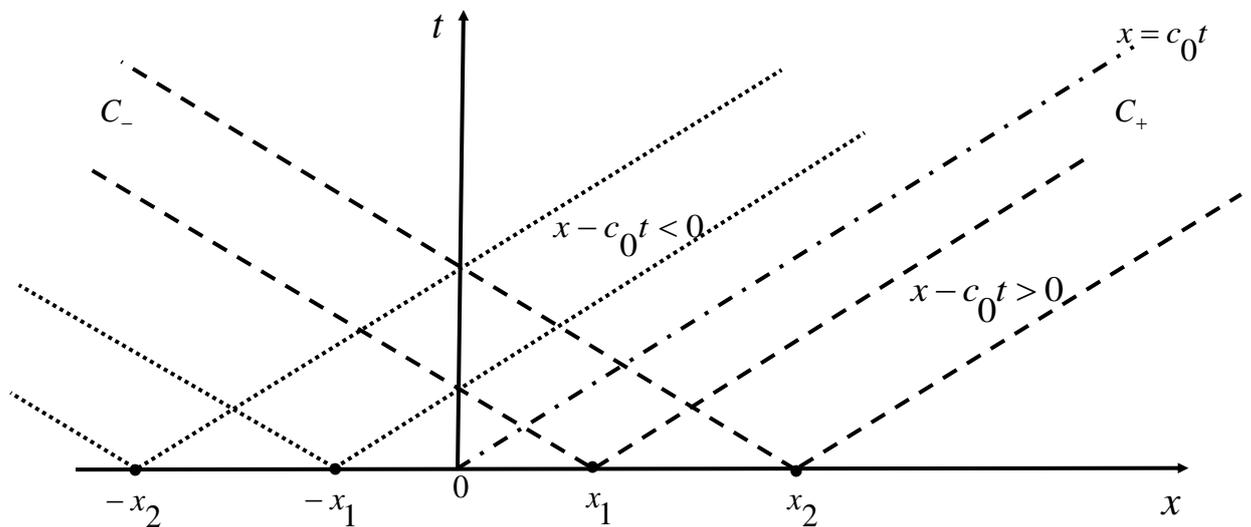


Рис 1.9

Пример 2. На Рис 1.10 представлен процесс распространения волны для случая полуограниченной прямой, закрепленной при $x = 0$, когда начальные данные на полуограниченной прямой отличны от нуля только в промежутке (x_1, x_2) , в котором начальное возмущение $\psi(x) = 0$, а начальная скорость возмущения $\Phi(x) = const$. Продолжим нечетно начальные данные. От каждого интервала (x_1, x_2) и $(-x_2, -x_1)$ распространяются отклонения, подобные тем, что представлены на Рис. 1.10. как видно из Рис. 1.10, в начальной стадии в области $x > 0$ процесс идет также, как и на бесконечной прямой. Затем происходит отражение волны от левого закрепленного конца (левой жесткой стенки), и, наконец, волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью движется вправо. Как видно из Рис. 1.8 благодаря нечетному продолжению начальных данных при $x = 0$ для всех $t \geq 0$ обеспечено выполнение условия $\phi(t, 0) = 0$. Однако в данном случае в результате отражения амплитуда возмущения не меняет свой знак.

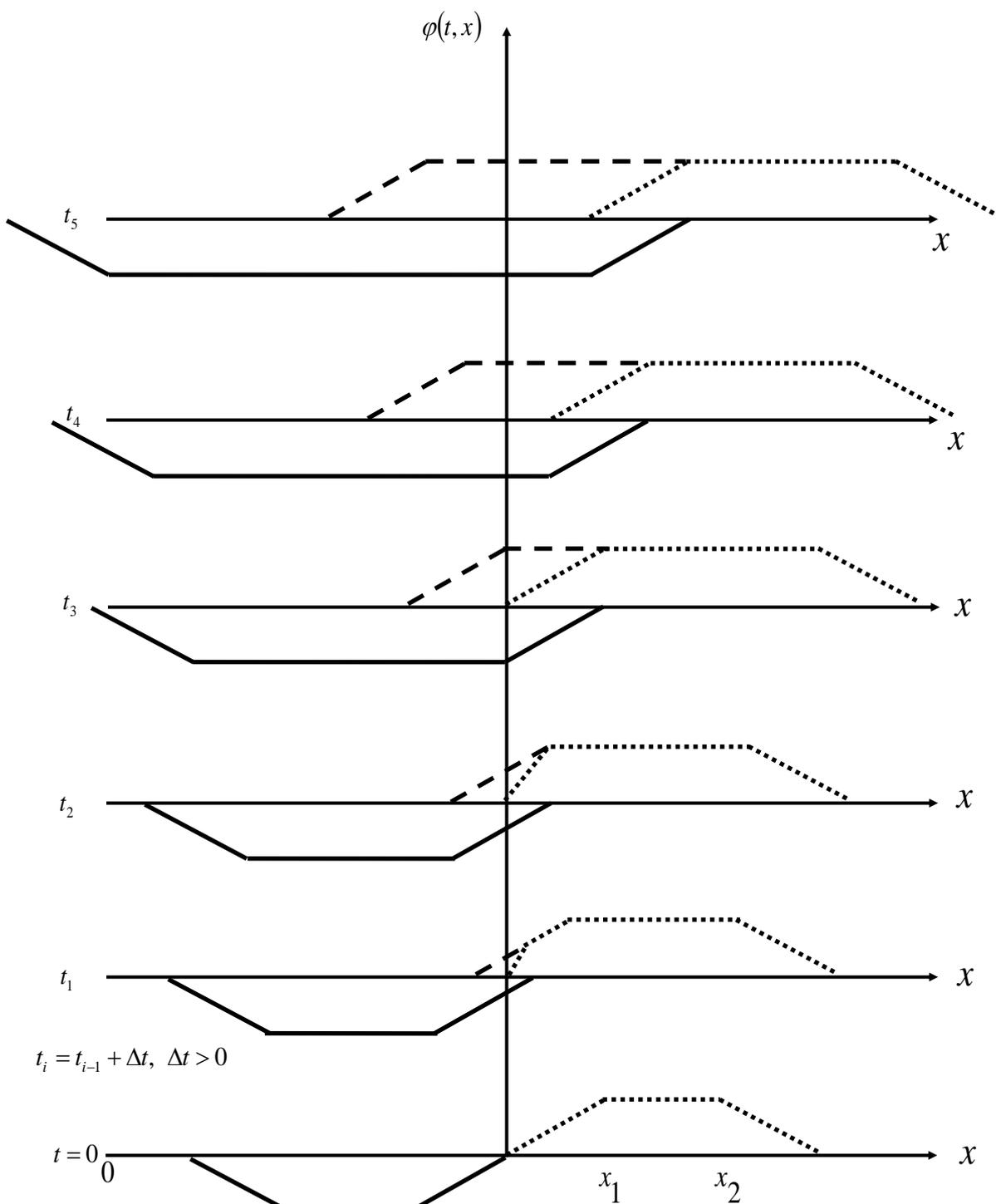


Рис. 1.10

Изучение отражения от свободного левого конца проводится аналогично, только начальные данные нужно продолжить четно, так что отражение волны от свободного конца будет происходить не с измененной, а с той же фазой.

Итак, мы рассмотрели две начально-краевые задачи с однородными граничными условиями вида $\phi(t,0) = \mu(t) = 0$ или $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,0) = \nu(t) = 0$ для значений $t \geq 0$.

В общем случае неоднородных граничных условий решение начально-краевой задачи благодаря свойствам линейности волнового уравнения, начальных и граничных условий можно искать в виде суммы решений двух задач – в первой задаче решение удовлетворяет ненулевым начальным условиям и нулевому граничному, во второй – ищем решение начально-краевой задачи на полуограниченной прямой при нулевых начальных условиях и заданном граничном:

Задача 1.: Уравнение $\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2}$, где $t > 0$, $0 < x < +\infty$,

Начальные условия

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}, \quad \text{где } t = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

Граничное условие $\hat{\phi}(t,0) = 0$, где $t > 0$, $x = 0$.

Решение задачи 1 нами было получено выше и дается формулой (1.41).

Задача 2.: Уравнение $\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}$, где $t > 0$, $0 < x < +\infty$,

Начальные условия

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(0, x) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases}, \quad \text{где } t = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

Граничное условие $\tilde{\phi}(t,0) = \mu(t)$, где $t > 0$, $x = 0$.

Получим решение задачи 2. Первое, поскольку искомое частное решение должно удовлетворять волновому уравнению, то оно должно быть вида $\tilde{\phi} = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$. Второе, т. к. мы имеем полуограниченную область, то из двух функций отличной от нуля остается только $f(x - c_0 t)$, описывающая бегущую вправо волну. Определим вид функции $f(z)$ из граничного условия $\tilde{\phi}(t,0) = f(-c_0 t) = \mu(t)$, откуда следует, что

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{c_0}\right). \text{ Поэтому } \tilde{\phi}(t,x) = \mu\left(-\frac{x - c_0 t}{c_0}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{c_0}\right). \text{ Однако полученное решение}$$

$\tilde{\phi}(t,x)$ определено лишь в верхней части I квадранта физической плоскости (в области влияния граничных данных $x - c_0 t < 0$), т. к. согласно граничному условию $\mu(t)$

определена для $t > 0$. Чтобы найти $\tilde{\phi}(t,x)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t , полагая $\mu(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда функция

$$\tilde{\phi}(t,x) = \mu\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \text{ будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять}$$

нулевым начальным условиям. Сумма этой функции $\tilde{\phi}(t, x)$ и функции (1.41) (решения задачи 1. $\hat{\phi}(t, x)$) дает решение первой краевой задачи для волнового уравнения

$$\phi(t, x) = \tilde{\phi}(t, x) + \hat{\phi}(t, x):$$

$$\phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\psi(x+c_0t) + \psi(x-c_0t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \Phi(z) dz; & x-c_0t > 0, x > 0 \\ \mu\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{1}{2} [\psi(x+c_0t) - \psi(c_0t-x)] + \frac{1}{2c_0} \int_{c_0t-x}^{x+c_0t} \Phi(z) dz; & x-c_0t < 0, x > 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

Как видно из полученного решения (1.42), в области $x-c_0t > 0, x > 0$ решение задачи “не чувствует” наличие на левом конце граничного условия, наличие границы сказывается на решение только в верхней части I квадранта физической плоскости (выше прямой $x=c_0t$). Из формулы (1.42) следует еще одно важное следствие: продифференцируем полученное для области $x-c_0t < 0, x > 0$ решение по переменной x и, полагая $x=0$, получим, что:

$$v(t) = \frac{1}{c_0} \left\{ \Phi(c_0t) - \left[\frac{d\mu}{dt}(t) - c_0 \cdot \frac{d\psi}{dt}(c_0t) \right] \right\}, \quad (1.43)$$

т. е. существует соотношение между 4-мя функциями, определяющими начальные и граничные условия (впрочем факт наличия такой связи вытекает из однозначной определенности решения 2-мя начальными функциями $\psi(x)$, $\Phi(x)$ и одной из функций $\mu(t)$ или $v(t)$, заданной на границе).

Формула (1.43) позволяет также свести решение третьей краевой задачи (когда на границе задана комбинация $\phi(t, 0)$ и $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0)$) к первой краевой задаче.

Аналогичным образом может быть построено решение второй краевой задачи (когда на границе задана $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = v(t)$).

Кусочно-дифференцируемые решения волнового уравнения.

Отметим еще раз одно важное обстоятельство. Очевидно, что функция $\phi(t, x)$, определяемая формулой Д’Аламбера (1.35), может быть решением волнового уравнения только в том случае, если функция $\psi(x)$ дифференцируема, а функция $\Phi(x)$ дифференцируема дважды. Из сказанного ясно, что функции, изображенные на Рис. 1.11, не могут являться решением волнового уравнения, т.к. они не всюду дважды дифференцируемы.

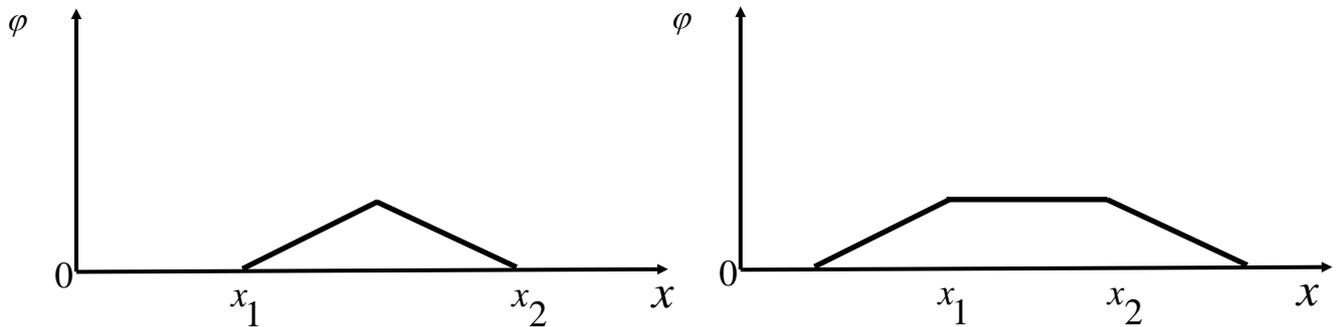


Рис 1.11

Для исправления указанного несоответствия есть **два пути**:

первый путь – подправить начальные условия до нужной степени гладкости, т. е. заменив их дифференцируемыми функциями $\psi(x)$ и $\Phi(x)$, и тогда этим начальным функциям уже будет соответствовать решение волнового уравнения (1.34.1). Кроме того заметим, что ранее мы доказали утверждение об устойчивости решения волнового уравнения, т. е., что функции, определяемые формулой (1.35), непрерывно зависят от начальных функций $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Т. о., если некоторым функциям $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ (напр., Рис. 1.11) не соответствует решение волнового уравнения, удовл. нач. усл. (1.34.2), то функция, определяемая формулой (1.35), является пределом решений волнового уравнения с немного сглаженными начальными условиями. Полученные таким предельным переходом функции называются **обобщенными решениями**.

второй путь – изменить форму записи исходного волнового уравнения, понизив уровень требований к дифференцируемости входящей в него функции, т.е понизив порядок, участвующих в уравнении производных от искомой функции. Прежде чем перейти к этой процедуре сделаем небольшое отступление - вспомним, как мы получили волновое уравнение. В начале мы выписали балансовые соотношения изменения за время Δt массы, импульса, энергии для выбранного нами неподвижного эйлерова объема сплошной среды $\Delta\Omega$, заключенного между двумя поперечными сечениями канала $S(t, x)$ и $S(t, x + \Delta x)$ на расстоянии Δx . Участвующие в этих балансовых соотношениях выражения для массы, импульса и энергии объема $\Delta\Omega$ в моменты времени t и $t + \Delta t$ - суть вычисленные с точностью до малых второго порядка средние значения интегралов от массы, импульса и энергии по объему $\Delta\Omega$ в моменты времени t и $t + \Delta t$. Участвующие в этих же балансовых соотношениях выражения для потоков массы, потока импульса и сил давления, потока энергии и работы сил давления через границу $\partial\Omega$ объема $\Delta\Omega$ за время Δt - суть вычисленные с точностью до малых второго порядка средние значения интегралов от указанных величин по границе $\partial\Omega$ объема $\Delta\Omega$ за время Δt . Далее, разделив обе части полученных балансовых соотношений на $\Delta t \cdot \Delta x$, и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$, мы получили исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1.13.1-3). Естественно, выполняя предельный переход, мы предполагали, что функции плотности, скорости, давления, внутренней энергии являются

дифференцируемыми функциями по времени и пространственной координате. Далее, выполнив линеаризацию системы уравнений и замыкающего соотношения (1.14.8), мы получили систему 2-х линейных уравнений в частных производных первого порядка и одного алгебраического уравнения. Далее, предполагая двукратную дифференцируемость искомых функций, мы свели задачу построения решения системы 2-х линейных уравнений в частных производных первого порядка и одного алгебраического уравнения к построению решения волнового уравнения относительно одной функции $\phi(t, x)$. После чего и столкнулись с проблемой ограниченного круга применимости полученных результатов в виду высоких требований к порядку дифференцируемости функции $\phi(t, x)$. Как следует из вышесказанного, по-видимому, уже на этапе аппроксимации интегралов с последующим предельным переходом происходит повышение требований к порядку дифференцируемости искомых функций. Поэтому для того чтобы выбрать другой путь, вернемся к основам – интегральной форме записи основных законов сохранения.

Интегральные законы сохранения для подвижного объема.

Пусть подвижный объем $\Omega(t) \in R^3$ состоит для всех моментов t из одних и тех же частиц сплошной среды, в этом случае он называется **материальным объемом**. Согласно **феноменологическому подходу (в отличие от газокинетического подхода)** каждый такой движущийся объем рассматривается как единое тело, снабженное следующими физико-механическими характеристиками:

Масса $\iiint_{\Omega(t)} \rho d\Omega$, импульс (или количество движения) - $\iiint_{\Omega(t)} \rho \vec{u} d\Omega$, полная энергия -

$\iiint_{\Omega(t)} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) d\Omega$, где e - удельная плотность внутренней энергии среды.

В основе вывода уравнений, определяющих законы изменения этих характеристик, можно положить следующий *принцип отвердевания*: изменение массы, импульса и энергии любого материального объема $\Omega(t)$ в каждый данный момент времени происходит за счет воздействия извне так же, как для твердого тела, занимающего объем $\Omega(t)$ и имеющего те же самые физико-механические характеристики. Приняв этот принцип, можно записать законы в следующей форме:

Масса неизменна, т. е. производная по времени t от массы материального объема равна нулю: $\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho d\Omega = 0$. (1.50.1)

Импульс меняется за счет приложенных внешних сил; его производная по t равна сумме (главному вектору) \vec{F} всех сил, приложенных к объему $\Omega(t)$. В нашей модели невязкого нетеплопроводного газа силами, действующими на объем $\Omega(t)$, будут только поверхностные силы давления, направленные по нормали к поверхности $\partial\Omega(t)$ нашего объема, $\vec{F} = - \iint_{\partial\Omega(t)} p \vec{n} d(\partial\Omega)$, где \vec{n} - единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega(t)$:

$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho \vec{u} d\Omega = - \iint_{\partial\Omega(t)} p \vec{n} d(\partial\Omega)$ (1.50.2)

Полная энергия меняется за счет работы внешних сил на действительных перемещениях и дополнительного притока энергии Q , который в нашей модели равен нулю $Q = 0$; Тогда производная по времени равна только мощности (работа в единицу времени), развиваемой действующими силами:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) d\Omega = - \iint_{\partial\Omega(t)} p(\vec{u}, \vec{n}) d(\partial\Omega) \quad (1.50.3)$$

Заметим, что уравнения (1.50.1)-(1.50.3) должны выполняться для любого материального объема $\Omega(t)$ в любой момент времени t . Кроме того, $\frac{d}{dt}$ - обыкновенная производная от функции одной переменной t .

Интегральные законы сохранения для неподвижного объема (балансовый метод).

Рассмотрим изменение во времени массы, импульса и энергии в фиксированном эйлеровом (независящем от времени) объеме $\Omega \in R^3$. В этом случае нам потребуются скорости притока основных физико-механических величин в данный объем. И тогда основные законы примут вид уравнений баланса этих величин. Поэтому: Скорость изменения массы в объеме Ω равна скорости потока массы через границу:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = - \iint_{\partial\Omega} \rho(\vec{u}, \vec{n}) d(\partial\Omega) \quad (1.51.1)$$

Скорость изменения импульса в объеме Ω равна действующей силе плюс скорость потока импульса через границу $\partial\Omega$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega = - \iint_{\partial\Omega} p \vec{n} d(\partial\Omega) - \iint_{\partial\Omega} \rho \vec{u}(\vec{u}, \vec{n}) d(\partial\Omega) \quad (1.51.2)$$

Скорость изменения полной энергии в объеме Ω равна мощности действующих сил плюс скорость потока полной энергии через границу $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) d\Omega = & - \iint_{\partial\Omega} p(\vec{u}, \vec{n}) d(\partial\Omega) - \\ & - \iint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) (\vec{u}, \vec{n}) d(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (1.51.3)$$

Заметим, что в уравнениях (1.51.1)- (1.51.3) обыкновенная производная может быть внесена как частная производная под знак интеграла в виду независимости области интегрирования от времени, т. е., напр., $\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) d\Omega$. Для сравнения:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho d\Omega = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \text{div}(\rho \vec{u}) \right) d\Omega - \text{формула дифференцирования интеграла по}$$

подвижному объему.

Очевидно, что обе системы интегральных уравнений (1.50.1)-(1.50.3) и (1.51.1)- (1.51.3) равносильны, т. к. выражают одни и те же физические законы. В частности на гладких решениях они приводят к одной и той же системе дифференциальных уравнений, а на разрывных решениях – к одной и той же системе соотношений на разрыве.

Замечание 1: Система интегральных уравнений (1.51.1)- (1.51.3) для нашего случая одномерного течения вязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения $S(t, x)$ - Рис. 2.1 сводится к следующим интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии: (заметим, что в нашем случае $\vec{u} = (u, 0, 0)$, объем Ω - это объем усеченного конуса между сечениями $S(t, x_1)$ и $S(t, x_2)$, граница объема $\partial\Omega$ образована поверхностями поперечных сечений $S(t, x_1)$, $S(t, x_2)$ и боковой поверхностью усеченного конуса, \vec{n} - единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$)

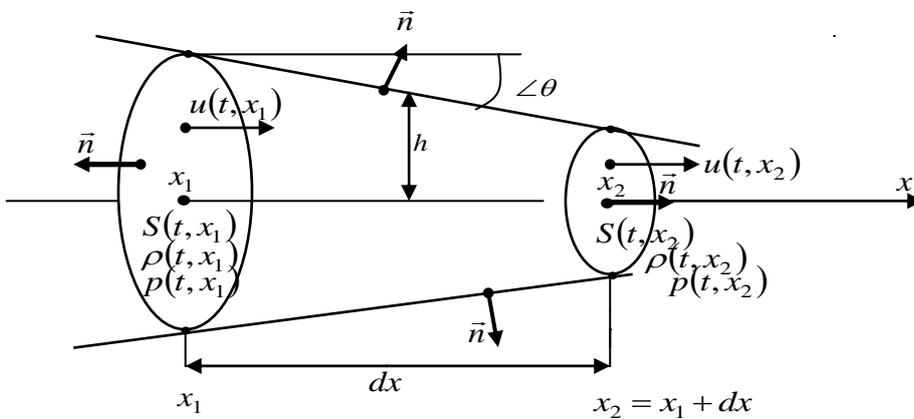


Рис. 2.1

Интегральная форма записи закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho S dx = - \left((\rho u S)|_{t, x_2} - (\rho u S)|_{t, x_1} \right) \quad (1.52.1)$$

Интегральная форма записи закона сохранения импульса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u S dx = & - \left((p S)|_{t, x_2} - (p S)|_{t, x_1} - \int_{x_1}^{x_2} p \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) - \\ & - \left((\rho u^2 S)|_{t, x_2} - (\rho u^2 S)|_{t, x_1} \right) \end{aligned} \quad (1.52.2)$$

Интегральная форма записи закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho E S dx = & - \left((\rho u E S)|_{t, x_2} - (\rho u E S)|_{t, x_1} \right) - \\ & - \left((p u S)|_{t, x_2} - (p u S)|_{t, x_1} \right) \end{aligned} \quad (1.52.3)$$

где $E = e + u^2 / 2$ - полная энергия газа.

Замечание 2: обратите внимание, что в соотношениях (1.52.1)-(1.52.3) пределы интегрирования x_1 и x_2 не зависят от времени, поэтому дифференцирование интегралов по времени в виде обыкновенной производной d/dt в левой части уравнений может быть внесено под знак интегрирования но уже в виде частной производной $\partial/\partial t$, т. к. подынтегральные функции зависят не только от t , но и от x .

Замечание 3: заметим, что любое из соотношений систем интегральных уравнений (1.50.1)-(1.50.3) или (1.51.1)- (1.51.3) или (1.52.1)-(1.52.3) можно, проинтегрировав по времени, записать в полностью интегральном виде. Для этого проинтегрируем по времени обе части интегральной формы записи законов сохранения массы (1.52.1), импульса (1.52.3), энергии (1.52.3), в результате получим закон сохранения массы в интегральном виде (1.52.4):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left((\rho S)|_{t_2, x} - (\rho S)|_{t_1, x} \right) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left((\rho u S)|_{t, x_2} - (\rho u S)|_{t, x_1} \right) dt$$

закон сохранения импульса в интегральном виде (1.52.5):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left((\rho u S)|_{t_2, x} - (\rho u S)|_{t_1, x} \right) dx = - \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left((p S)|_{t, x_2} - (p S)|_{t, x_1} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(p \frac{\partial S}{\partial x} \right) dx dt \right\} - \int_{t_1}^{t_2} \left((\rho u^2 S)|_{t, x_2} - (\rho u^2 S)|_{t, x_1} \right) dt$$

закон сохранения энергии в интегральном виде (1.52.6):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left((\rho E S)|_{t_2, x} - (\rho E S)|_{t_1, x} \right) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left((\rho u E S)|_{t, x_2} - (\rho u E S)|_{t, x_1} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left((p u S)|_{t, x_2} - (p u S)|_{t, x_1} \right) dt$$

Вернемся вновь к интегральной форме записи (1.52.4)- (1.52.6) основных законов сохранения. Для многочисленных приложений (например, при выводе соотношений на разрывах, нахождении решений краевых задач, построении конечно-разностных схем и т. п.) интегральная форма записи (1.52.4)- (1.52.6) оказывается не вполне удобной. Поэтому покажем, что интегральные законы (1.52.4)- (1.52.6) могут быть записаны в виде следующих интегральных соотношений (здесь G - односвязная область с непрерывной кусочно-гладкой границей ∂G Рис. 2.1.1):

$$\oint_{\partial G} \left((\rho S) dx - (\rho u S) dt \right) = 0, \quad (1.52.7)$$

$$\oint_{\partial G} \left((\rho u S) dx - ((\rho u^2 + p) S) dt \right) = \iint_G \left(p \frac{\partial S}{\partial x} \right) dt dx, \quad (1.52.8)$$

$$\oint_{\partial G} ((\rho ES) dx - ((\rho E + p)uS) dt) = 0. \quad (1.52.9)$$

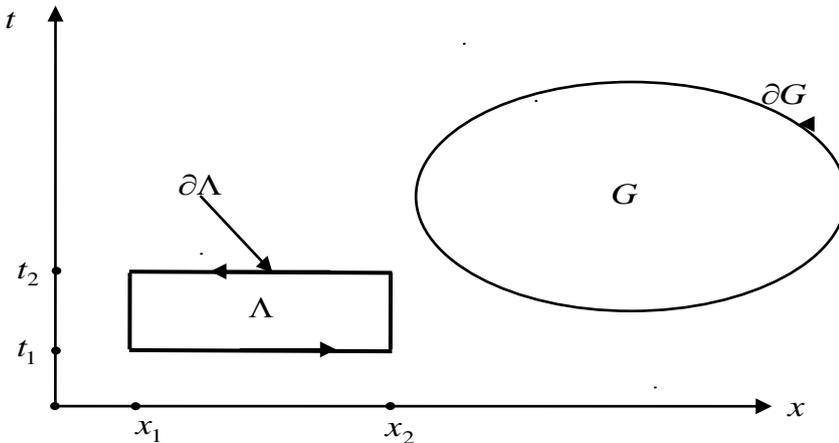


Рис. 2.1.1

Доказательство проведем на примере перехода от соотношения (1.52.5) к (1.52.8) с ненулевой правой частью. Рассмотрим вначале прямоугольную область Λ с границей $\partial\Lambda$. Далее умножим обе части интегрального равенства (1.52.5) на “-1”, перегруппируем слагаемые и, поменяв местами у части интегралов пределы интегрирования, получим

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho u S)|_{t_1, x} dx + \int_{x_2}^{x_1} (\rho u S)|_{t_2, x} dx + \int_{t_1}^{t_2} (-(\rho u^2 + p)S)|_{t, x_2} dt + \\ + \int_{t_2}^{t_1} (-(\rho u^2 + p)S)|_{t, x_1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (p \frac{\partial S}{\partial x}) dx dt$$

теперь, добавив к каждой из подынтегральных функций слагаемое равно нулю для данного пути интегрирования, получим интеграл по прямоугольному контуру $\partial\Lambda$ (контур обходится против часовой стрелки, поэтому-то в интегралах и был изменен порядок пределов интегрирования) от общей подынтегральной функции $(\rho u S) dx - ((\rho u^2 + p)S) dt$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left((\rho u S)|_{t_1, x} dx - ((\rho u^2 + p)S)|_{t_1, x} dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} \left((\rho u S)|_{t, x_2} dx - ((\rho u^2 + p)S)|_{t, x_2} dt \right) + \\ + \int_{x_2}^{x_1} \left((\rho u S)|_{t_2, x} dx - ((\rho u^2 + p)S)|_{t_2, x} dt \right) + \int_{t_2}^{t_1} \left((\rho u S)|_{t, x_1} dx - ((\rho u^2 + p)S)|_{t, x_1} dt \right) = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (p \frac{\partial S}{\partial x}) dx dt$$

и далее, переписав полученное интегральное уравнение в более компактном виде с использованием выбранных обозначений для прямоугольной области Λ с границей $\partial\Lambda$, получим требуемую форму записи для случая прямоугольной формы области

$$\oint_{\partial \Lambda} ((\rho u S) dx - ((\rho u^2 + p) S) dt) = \iint_{\Lambda} (p \frac{\partial S}{\partial x}) dx dt \quad (1.52.10)$$

Далее, если контур ∂G области G состоит из кусков, параллельных осям координат Ot, Ox , то область G можно представить как сумму соответствующих прямоугольников. Суммируя контурные интегралы вида (1.52.10), соответствующие отдельным слагаемым, мы получим, что слагаемые, относящиеся к внутренним границам, взаимно уничтожаются, т. к. интегрирование производится в противоположных направлениях, а остающиеся слагаемые дадут формулу (1.52.8).

В случае, если контур ∂G области G состоит из кусков, не параллельных осям координат и не являющихся линиями разрыва подынтегральных функций, то накрыв область G прямоугольной сеткой, параллельной осям координат, и применив к области, образованной из совокупности прямоугольных ячеек, накрывающих G , предыдущее утверждение, в пределе при уменьшающихся размерах ячеек сетки получим формулу (1.52.8) для односвязной области G с непрерывной кусочно-гладкой границей ∂G . Заметим, что в случае, если контур ∂G содержит куски, являющиеся линиями разрыва подынтегральных функций, то формула (1.52.8) сохраняет силу, если брать в качестве значений подынтегральной функции ее предельные значения с внутренней стороны области G . Таким образом, справедливость интегральной формулы (1.52.8), а значит и аналогичных формул (1.52.7), (1.52.9), доказана.

Заметим, что обратная операция (т. е. операция перехода от дифференциальной формы записи основных законов к интегральной) значительно проще, т. е. если проинтегрировать уравнения (1.13.1)-(1.13.3) по области их определения G в фазовой плоскости (t, x) , то получим:

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} \right) dt dx &= 0 \\ \iint_G \left(\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 + p) S)}{\partial x} \right) dt dx &= \iint_G (p \frac{\partial S}{\partial x}) dt dx \\ \iint_G \left(\frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p) u S)}{\partial x} \right) dt dx &= 0 \end{aligned}$$

Для перехода от интегрирования по области G к интегрированию по ее контуру ∂G в левых частях полученных интегралов нам потребуется формула Грина. В общем виде формула Грина для плоской области преобразует двойной интеграл по области G в криволинейный интеграл по границе ∂G (причем криволинейный интеграл по границе ∂G берется в положительном направлении, т. е. с направлением обхода против часовой стрелки Рис. 2.1.1):

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial G} (Q dx + P dt),$$

эта формула справедлива, если область G - односвязная, граница ∂G - непрерывная кусочно-гладкая функция, а функции $P(t, x)$, $Q(t, x)$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непрерывны на $G \cup \partial G$.

Применяя формулу Грина с указанными ограничениями на область, границу и функции для наших интегральных уравнений получим:

$$\iint_G \left(\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial G} ((\rho S) dx - (\rho u S) dt) = 0$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 + p) S)}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial G} ((\rho u S) dx - ((\rho u^2 + p) S) dt) = \iint_G (p \frac{\partial S}{\partial x}) dt dx$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p) u S)}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial G} ((\rho E S) dx - ((\rho E + p) u S) dt) = 0$$

Найденные таким путем интегральные уравнения в точности совпадают с полученными непосредственно из интегральных соотношений (1.52.4)- (1.52.6) интегральными уравнениями (1.52.7)-(1.52.9).

Т. о., как видим, на гладких (непрерывно дифференцируемых) решениях интегральная и дифференциальная формы записи законов сохранения оказываются эквивалентными. Однако, **если искомое решение не всюду дифференцируемо, то с математической точки зрения в качестве исходной формы записи основных законов должна быть выбрана интегральная форма.**

Выполним линеаризацию интегральных уравнений (1.52.7)-(1.52.9) для нахождения приближенных решений, возможно содержащих разрывы, в случае **течения в канале с подвижными стенками** ($S = S(t, x)$) **термически и калорически совершенного газа:**

Пусть известно некоторое **основное движение газа, т.е. точное решение интегральной системы уравнений квазиодномерной газовой динамики (1.52.7)-(1.52.9):**

$$\rho = \tilde{\rho}(t, x), \quad u = \tilde{u}(t, x), \quad p = \tilde{p}(t, x), \quad s = \tilde{s}(t, x) \quad (1.20)$$

Ищется другое, мало отличающееся от (1.20), решение вида

$$\rho = \tilde{\rho}(t, x) + \delta \cdot \rho', \quad u = \tilde{u}(t, x) + \delta \cdot u', \quad p = \tilde{p}(t, x) + \delta \cdot p', \quad s = \tilde{s}(t, x) + \delta \cdot s', \quad (1.21)$$

где штрихом обозначены новые неизвестные функции (добавки к основному решению или его возмущения) переменных t, x , а $\delta \ll 1$ - некоторый малый параметр. Подставим разложения вида (1.21) в интегральные законы (1.52.7)-(1.52.9) и, используя определение

величины полной энергии $E = e + \frac{u^2}{2}$, а также соотношение, связывающее величины

внутренней энергии, давления и плотности для модели термически и калорически

совершенного газа $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$, получим интегральные уравнения относительно величин

искомых возмущений ρ', u', p' (заметим, что величина возмущения энтропии s' в явном виде в системе не присутствует, как мы уже показали ранее, линеаризованное уравнение

состояния для нашей модели имеет вид (1.24.4): $p' = c_0^2 \cdot \rho' + s' \cdot p_0 / c_V$, $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$):

$$\oint_{\partial G} ((\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') S dx - (\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') (\tilde{u}(t, x) + \delta u') S dt) = 0, \quad (1.52.11)$$

$$\oint_{\partial G} ((\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') (\tilde{u}(t, x) + \delta u') S dx - ((\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') (\tilde{u}(t, x) + \delta u')^2 + \tilde{p} + \delta p') S dt) =$$

$$= \iint_G (\tilde{p} + \delta p') \frac{\partial S}{\partial x} dt dx \quad (1.52.12)$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial G} (\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') \left(\frac{\tilde{p} + \delta p'}{(\gamma - 1)(\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho')} + \frac{(\tilde{u}(t, x) + \delta u')^2}{2} \right) S dx - \\
& - (\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho') \left(\frac{\tilde{p} + \delta p'}{(\gamma - 1)(\tilde{\rho}(t, x) + \delta \rho')} + \frac{(\tilde{u}(t, x) + \delta u')^2}{2} \right) + \\
& + \tilde{p} + \delta p' (\tilde{u}(t, x) + \delta u') S dt = 0
\end{aligned} \tag{1.52.13}$$

Далее:

- 1). Раскроем соответствующие произведения в (1.52.11)-(1.52.13)
- 2). Вычтем почленно из каждой части интегральных уравнений (1.52.11)-(1.52.13) соответствующее уравнение системы (1.52.7)-(1.52.9), выполненное на ее решении (1.20).
- 3). Сократим все оставшиеся после вычитания в (1.52.11)-(1.52.13) члены на величину δ
- 4). Предположим, что все оставшиеся в уравнениях интегральные члены, содержащие в качестве множителя малый параметр δ , имеют конечное предельное значение при $\delta \rightarrow 0$.

5). Рассмотрим в качестве основного движения состояние покоящегося газа с постоянными значениями плотности, давления и энтропии

$$\tilde{\rho}(t, x) = \rho_0, \quad \tilde{u}(t, x) = u_0 = 0, \quad \tilde{p}(t, x) = p_0, \quad \tilde{s}(t, x) = s_0$$

Тогда, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в интегральных уравнениях (1.52.11)-(1.52.13), получим следующую **линеаризованную систему интегральных уравнений для величин возмущений** основного движения:

Линеаризованный интегральный закон сохранения массы

$$\oint_{\partial G} \left((\rho' S) dx - (\rho_0 u' S) dt \right) = 0, \tag{1.52.14}$$

Линеаризованный интегральный закон сохранения импульса

$$\oint_{\partial G} \left((\rho_0 u' S) dx - (p' S) dt \right) = \iint_G \left(p' \frac{\partial S}{\partial x} \right) dt dx, \tag{1.52.15}$$

Линеаризованный интегральный закон сохранения энергии

$$\oint_{\partial G} \left(p' S) dx - (\gamma p_0 u' S) dt \right) = 0. \tag{1.52.16}$$

Как уже говорилось, на гладких (непрерывно дифференцируемых) решениях интегральная и дифференциальная формы записи законов сохранения оказываются эквивалентными. Получим аналогично тому, как это было сделано в общем случае исходной нелинейной системы, дифференциальную форму записи линеаризованной системы интегральных уравнений для величин возмущений (1.52.14)-(1.52.16). При этом предполагается, что искомые возмущения ρ', u', p' также, как и величина площади поперечного сечения канала $S(t, x)$, являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Тогда, после двукратного применения теоремы о среднем, получим:

Линеаризованный закон сохранения массы

$$\frac{\partial(\rho' S)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(u' S)}{\partial x} = 0, \tag{1.52.17}$$

Линеаризованный закон сохранения импульса

$$\rho_0 \frac{\partial(u'S)}{\partial t} + \frac{\partial(p'S)}{\partial x} = p' \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1.52.18)$$

Линеаризованный закон сохранения энергии

$$\frac{\partial(p'S)}{\partial t} + \gamma p_0 \frac{\partial(u'S)}{\partial x} = 0, \quad (1.52.19)$$

Получили линейную систему 3-х уравнений в частных производных первого порядка относительно 3-х искомых функций ρ', u', p' . Четвертым уравнением, служащим для определения величины возмущения энтропии s' служит линеаризованное уравнение состояния (1.24.4):

$$p' = c_0^2 \cdot \rho' + s' \cdot p_0 / c_V, \text{ где } c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0 \quad (1.52.20)$$

Получим одно важное следствие из линейной системы уравнений (1.52.17)-(1.52.19) вместе с конечным соотношением - линеаризованным уравнением состояния (1.52.20).

Умножим обе части уравнения (1.52.17) на постоянную $-\gamma p_0 / \rho_0$ и сложим с уравнением

$$(1.52.19), \text{ получим } \frac{\partial((p' - \gamma p_0 \rho' / \rho_0)S)}{\partial t} = 0 \text{ или, с учетом (1.52.20), найдем, что } \frac{\partial(s'S)}{\partial t} = 0.$$

Т.е. произведение возмущения энтропии s' на площадь поперечного сечения S не зависит от времени. Вспомним теперь, что ранее для гладких решений в рамках общей нелинейной постановки нами было получено уравнение изменения величины энтропии в индивидуальной частице газа

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{\partial(\ln(S))}{\partial t} \quad (1.15.3)$$

Из которого следовало, что для случая $S = S(x)$, в частности, для практически важных случаев одномерных течений с плоской ($S(x) = const$), цилиндрической ($S(x) = x$) и сферической ($S(x) = x^2$) симметрией, энтропия индивидуальной частицы остается неизменной со временем.

Для упрощенной линейной постановки в случае $S = S(x)$ следует, что величина возмущения энтропии $s' = s'(x)$, т.е. постоянна в каждой точке эйлерова пространства, где изучается движение газа. Но, частицы газа перемещаются от одной точки пространства к другой и при этом энтропия частицы согласно исходной нелинейной модели – постоянна. Поэтому для устранения возникающего противоречия нашей линейной модели с исходной нелинейной мы примем, что величина энтропии постоянна во всей области движения газа ($s' = const$), и тогда, не нарушая общности рассмотрения, примем $s' = 0$. Отсюда уравнение состояния для гладких решений упрощается до вида $p' = c_0^2 \cdot \rho'$.

Система уравнений в частных производных (1.52.17)-(1.52.19) вместе с конечным соотношением - линеаризованным уравнением состояния (1.52.20) описывает движение газа только в областях, где искомые функции непрерывны вместе со своими первыми производными. Предположим теперь, что в такой области гладкости решения существует линия разрыва одной или нескольких искомых функций (разрыв первого рода).

Установим связи между искомыми величинами, вытекающими из линеаризованной системы интегральных уравнений для возмущений (1.52.14)-(1.52.16).

Для этого рассмотрим произвольную дифференцируемую кривую $x = x(t)$ в фазовой плоскости (t, x) и предположим, что эта линия является линией разрыва одной или

нескольких *искомых функций* $\rho'(t, x), u'(t, x), p'(t, x)$ и $s'(t, x)$. Примем также, что величина площади поперечного сечения канала $S(t, x)$ - непрерывная функция своих аргументов. Пусть, например, линия разрыва (точнее, траектория его движения) $x = x(t)$ - возрастающая функция (Рис. 2.5).

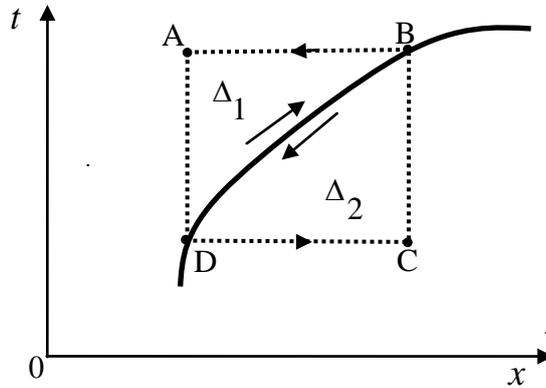


Рис 2.5.

Применим интегральные законы сохранения (1.52.14)-(1.52.16) последовательно - к области в виде прямоугольника BADC, а также к областям в виде криволинейных треугольников $\Delta_1 = BAD$ и $\Delta_2 = BDC$. Вычитая из суммы равенств, полученных для треугольников Δ_1 и Δ_2 , равенство для прямоугольника BADC и, учитывая, что

$$\iint_{\Delta_1} p' \frac{\partial(S)}{\partial x} dt dx + \iint_{\Delta_2} p' \frac{\partial(S)}{\partial x} dt dx - \iint_{BADC} p' \frac{\partial(S)}{\partial x} dt dx = 0,$$

получим три следствия из

исходных уравнений (1.52.14)-(1.52.16):

$$\int_{DB} \left\{ \left(\rho' \cdot \frac{dx}{dt} - \rho_0 \cdot u' \right) \Big|_1 - \left(\rho' \cdot \frac{dx}{dt} - \rho_0 \cdot u' \right) \Big|_2 \right\} \cdot S \cdot dt = 0$$

$$\int_{DB} \left\{ \left(\rho_0 \cdot u' \cdot \frac{dx}{dt} - p' \right) \Big|_1 - \left(\rho_0 \cdot u' \cdot \frac{dx}{dt} - p' \right) \Big|_2 \right\} \cdot S \cdot dt = 0,$$

$$\int_{DB} \left\{ \left(p' \cdot \frac{dx}{dt} - \gamma \cdot p_0 \cdot u' \right) \Big|_1 - \left(p' \cdot \frac{dx}{dt} - \gamma \cdot p_0 \cdot u' \right) \Big|_2 \right\} \cdot S \cdot dt = 0,$$

где символьное обозначение $(\dots) \Big|_{1,2}$ показывает, что выражения внутри скобок берутся как предельные значения в точках линии DB изнутри треугольников Δ_1 или Δ_2 . Величина

$$S = S|_1 = S|_2 \text{ в виду непрерывности функции } S = S(t, x).$$

Далее, в силу произвольной малости дуги DB, получим:

(оператор величины разрыва функции по определению равен, например, $[\rho'] = \rho|_2 - \rho|_1$)

$$\frac{dx}{dt} \cdot [\rho'] - \rho_0 \cdot [u'] = 0$$

$$\rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u'] - [p'] = 0$$

$$\frac{dx}{dt} \cdot [p'] - \gamma \cdot p_0 \cdot [u'] = 0.$$

Рассмотрим теперь полученные соотношения как систему 3-х линейных однородных алгебраических уравнений относительно 3-х неизвестных $[\rho'], [u'], [p']$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \cdot [\rho'] - \rho_0 \cdot [u'] = 0 \\ \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u'] - [p'] = 0 \\ \frac{dx}{dt} \cdot [p'] - \gamma \cdot p_0 \cdot [u'] = 0 \end{cases} \quad (1.52.21)$$

Система уравнений (1.52.21), связывающая величины скачков плотности, скорости и давления на сильном разрыве, расщепляется на систему двух последних уравнений относительно скачков давления и скорости и первое уравнение для определения скачка плотности по известной величине скачка скорости. Решим систему двух последних уравнений относительно $[u'], [p']$:

$$\begin{cases} \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u'] - [p'] = 0 \\ \gamma \cdot p_0 \cdot [u'] - \frac{dx}{dt} \cdot [p'] = 0 \end{cases}$$

Это система 2-х линейных однородных алгебраических уравнений, для существования ненулевого решения которой необходимо, чтобы главный определитель системы $\Delta = 0$, т.

$$\text{e. } \Delta = \det \begin{vmatrix} \rho_0 \cdot dx/dt & -1 \\ \gamma \cdot p_0 & -dx/dt \end{vmatrix} = -\rho_0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \gamma \cdot p_0 = 0, \text{ следовательно, } \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$dx = \pm \sqrt{\frac{\gamma \cdot p_0}{\rho_0}} \cdot dt = \pm c_0 \cdot dt, \text{ т. е. линия } x = x(t) \text{ является характеристикой.}$$

Т. о., если у решений линеаризованной системы уравнений квазиодномерной ($S = S(t, x)$) газовой динамики имеют место быть сильные разрывы, то они распространяются только по характеристикам семейств $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$.

Выпишем теперь условия, которым должны удовлетворять скачки $[\rho'], [u'], [p']$ на разрывах:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \cdot [\rho'] - \rho_0 \cdot [u'] = 0 \\ \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u'] - [p'] = 0 \end{cases}, \text{ где } \frac{dx}{dt} = \pm c_0 \quad (1.52.22)$$

Система (1.52.2) может быть преобразована к эквивалентной форме, левые части которой имеют важное значение для дальнейшего анализа течений с малыми возмущениями параметров газа:

$$\begin{cases} [p'] - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u'] = 0 \\ [p'] - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot [\rho'] = 0 \end{cases}, \text{ где } \frac{dx}{dt} = \pm c_0 \quad (1.52.23)$$

или

$$\begin{cases} p'_1 - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u'_1 = p'_2 - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u'_2 \\ p'_1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \rho'_1 = p'_2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \rho'_2 \end{cases}, \text{ где } \frac{dx}{dt} = \pm c_0 \quad (1.52.24)$$

Смысл первого из соотношений (1.52.4) состоит в инвариантности величины

$p' - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u'$ при переходе через сильный разрыв $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$ и более подробно будет объяснен чуть позже. Второе же соотношение в (1.52.4), если вспомнить вид линеаризованного уравнения состояния

$p' = c_0^2 \cdot \rho' + s' \cdot p_0 / c_V$ термически и калорически совершенного газа, дает, что $s'_1 = s'_2$. Т.

е. энтропия непрерывна на сильном разрыве или, другими словами, является инвариантом. Заметим, что в полной нелинейной постановке такого свойства не наблюдается, т. е. энтропия разрывна на сильных скачках и поэтому уравнения состояния газа слева и справа от разрыва отличаются в виду различия величины энтропии s в

выражении $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \cdot \exp\left(\frac{s-s_0}{c_V}\right)$. В нашем же линейном случае мы вправе работать с

уравнением состояния для газа одного и того же вида по обе стороны от сильного разрыва.

Теперь, после такого продолжительного отступления, вернемся на наш **второй путь** – **путь изменения формы записи волнового уравнения с целью понижения уровня требований к дифференцируемости входящей в него функции**. Для построения интегрального аналога полученного ранее волнового уравнения для потенциала скорости $\phi(t, x)$ существуют два способа. Первый способ аналогичен выполненной нами ранее линеаризации дифференциальной системы уравнений (1.13.1)-(1.13.3), но теперь предстоит выполнить линеаризацию уравнений (1.52.4)-(1.52.6) в интегральной форме записи. Этот способ достаточно громоздок по сравнению со вторым способом, когда из дифференциальной формы записи волнового уравнения путем интегрирования по времени и пространству мы получим интегральный аналог волнового уравнения, не требующий от искомого потенциала $\phi(t, x)$ быть дважды дифференцируемым. Итак, проинтегрируем обе

части волнового уравнения $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, выполненного во всех точках верхней

полуплоскости $R^2_+ = \{t \geq 0, -\infty < x < \infty\}$, по области прямоугольной формы

$\Lambda = \{t_1 \leq t \leq t_2, x_1 \leq x \leq x_2\}$ и получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dt \quad (1.53.1)$$

преобразуем полученное интегральное уравнение, взяв соответствующие однократные интегралы (фактически выполнив переход от интегрирования по области Λ к интегрированию по границе области $\partial\Lambda$ (Рис. 2.2).), и перенесем все члены в левую часть

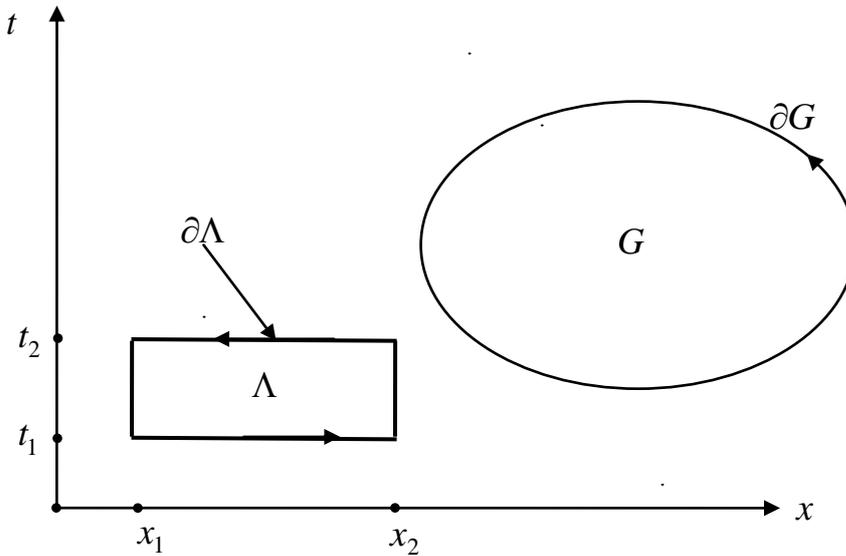


Рис. 2.2

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1, x) \right) dx - \int_{t_1}^{t_2} \left(c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_2) - c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_1) \right) dt = 0$$

Далее, умножим обе части на “-1”, перегруппируем слагаемые и, поменяв местами в двух последних интегралах пределы интегрирования, получим:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1, x) dx + \int_{t_1}^{t_2} c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_2) dt + \int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_2, x) dx + \int_{t_2}^{t_1} c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_1) dt = 0$$

теперь, добавив к каждой из подынтегральных функций слагаемое равное нулю для данного пути интегрирования, получим интеграл по контуру $\partial\Lambda$ (контур обходится против часовой стрелки, поэтому-то в интегралах и был изменен порядок пределов

интегрирования) от общей подынтегральной функции $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, x) dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_2) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_2) dt \right) + \int_{x_2}^{x_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_2, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_2, x) dt \right) + \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_1) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_1) dt \right) = 0$$

и далее, переписав полученное интегральное уравнение в более компактном виде, имеем

$$\oint_{\partial\Lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = 0 \quad (1.53.2)$$

Сформулируем **интегральный аналог задачи Коши для волнового уравнения на неограниченной прямой Ox** :

Найти функцию $\phi(t, x)$, определенную и кусочно-гладкую в области $\{t \geq 0, -\infty < x < \infty\}$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\oint_{\partial G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = 0 \quad (1.56)$$

и начальным условиям $\begin{cases} \phi(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}$, где функции $\psi(x), \Phi(x)$ - кусочно-непрерывны.

Контур ∂G - произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в области $t \geq 0$.

Решение: Пусть функция $\phi(t, x)$ представляет решение задачи. Тогда, выбрав в качестве контура ∂G треугольник АВМ, образованный отрезками АМ и МВ двух характеристик C_+ и C_- плюс отрезок АВ оси $t = 0$, заключенный между характеристиками (Рис. 2.3), получим:

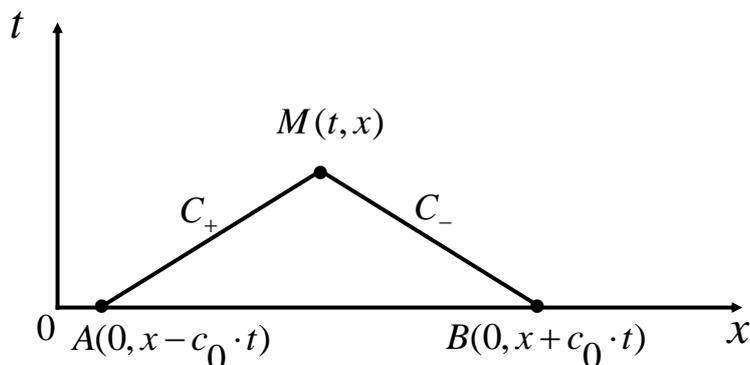


Рис. 2.3

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta ABM} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) &= \int_{BM} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) + \\ &+ \int_{MA} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) + \int_{AB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Вычислим интегралы вдоль отрезков прямых ВМ, МА, АВ. Для этого заметим, что вдоль отрезка МА ввиду определения характеристики C_+ имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = c_0$, т. е.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt = c_0 \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dt + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dx \right) = c_0 \cdot d\phi, \text{ аналогично}$$

вдоль отрезка ВМ ввиду опред. характеристики C_- имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = -c_0$, т.

$$\text{е. } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt = -c_0 \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dt + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dx \right) = -c_0 \cdot d\phi.$$

След., подынтегральное выражение вдоль характеристик является полным дифференциалом. Производя искомое интегрирование вдоль отрезков ВМ и МА,

$$\text{получаем: } \int_{BM} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = -c_0 \cdot (\phi(M) - \phi(B)),$$

$$\int_{MA} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = c_0 \cdot (\phi(A) - \phi(M)),$$

$$\text{далее } \int_{AB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = \int_{AB} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx,$$

поэтому формула (1.57) примет вид:

$$-c_0 \cdot (\phi(M) - \phi(B)) + c_0 \cdot (\phi(A) - \phi(M)) + \int_{AB} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx = 0, \text{ разрешая которую относительно}$$

искомого значения $\phi(M)$ находим:

$$\phi(M) = \frac{\phi(B) + \phi(A)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{AB} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx \quad \text{или в исходных переменных } (t, x)$$

$$\phi(t, x) = \frac{\psi(x + c_0 t) + \psi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz. \quad (1.58)$$

Тем самым доказано существование решения нашей задачи. Заметим теперь, что полученное решение совпадает с формулой Д'Аламбера.

Сформулируем **интегральный аналог первой краевой задачи для волнового уравнения на полуграниченной прямой** $x \geq 0$:

Найти функцию $\phi(t, x)$, определенную и кусочно-гладкую в области $\{t \geq 0, 0 \leq x < \infty\}$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\oint_{\partial G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = 0 \quad (1.56)$$

$$\text{начальным условиям } \begin{cases} \phi(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}, \text{ где функции } \psi(x), \Phi(x) \text{ - кусочно-непрерывны.}$$

и граничному условию $\phi(t, 0) = \mu(t)$, где $t \geq 0$.

Контур ∂G - произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в области $t \geq 0, x \geq 0$.

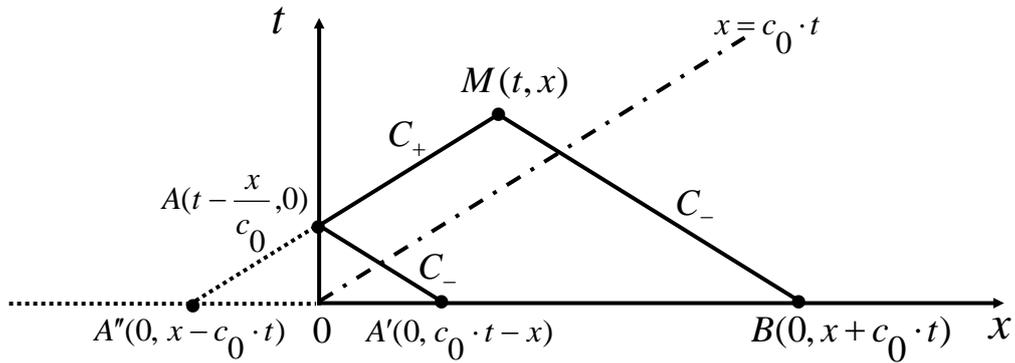


Рис. 2.4

Решение: Будем искать решение $\phi(t, x)$ уравнения (1.56) в некоторой точке $M(t, x)$ для значений $t > x/c_0$. Т. к. в области $t < x/c_0$ (т. е. под характеристикой $x = c_0 t$) влияние граничного условия не сказывается и, след., решение определяется формулой (1.58) как и в задаче Коши. Применим формулу (1.56) к четырехугольнику $MAA'B$, образованному из 3-х отрезков характеристик и части оси Ox (Рис. 2.4). Выполнив интегрирование вдоль отрезков характеристик MA , AA' , BM , получим:

$$2c_0\phi(M) = 2c_0\phi(A) + c_0\phi(B) - c_0\phi(A') + \int_{A'B} \frac{\partial\phi}{\partial t} dx,$$

подставив в полученную формулу координаты точек M , A , A' , B , найдем:

$$\phi(t, x) = \phi\left(0, t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{\phi(0, x + c_0 t) - \phi(0, c_0 t - x)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{c_0 t - x}^{x + c_0 t} \frac{\partial\phi}{\partial t}(0, x) dx,$$

или, подставляя заданные начальные и граничные условия, найдем окончательный вид искомого решения

$$\phi(t, x) = \mu\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{\psi(x + c_0 t) - \psi(c_0 t - x)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{c_0 t - x}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz, \text{ при } t > x/c_0 \quad (1.57)$$

Характеристики – линии распространения разрывов производных решений интегрального аналога (1.56) волнового уравнения (линии слабого разрыва).

Покажем теперь, что для уравнения (1.56) линиями разрыва производных функции $\phi(t, x)$, получивших название **линий слабого разрыва**, могут быть только линии семейств характеристик $C_+ : x - c_0 t = const$ и $C_- : x + c_0 t = const$.

Док-во Рассмотрим произвольную дифференцируемую кривую $x = x(t)$ в фазовой плоскости и предположим, что эта линия является линией разрыва *непрерывной, кусочно-дифференцируемой функции* $\phi(t, x)$. Предположим для определенности, что $x = x(t)$ - возрастающая функция (Рис. 2.5).

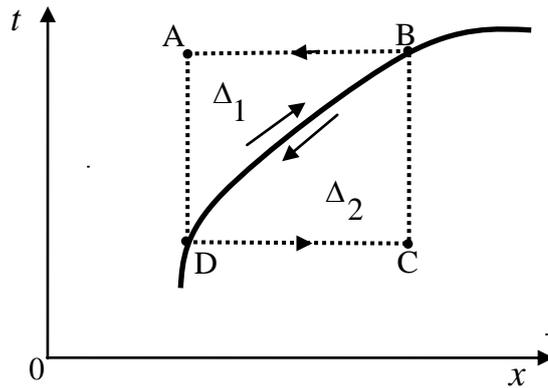


Рис. 2.5

Теперь применим формулу (1.56) последовательно - к прямоугольнику BADC,

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} dt \right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} dt \right) = 0 \quad (1.59)$$

а также к криволинейным треугольникам $\Delta_1 = BAD$ и $\Delta_2 = BDC$:

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} dt \right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_1 dt = 0, \quad (1.59)$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} dt \right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_2 dt = 0, \quad (1.60)$$

где символьное обозначение $(\dots) \Big|_{1,2}$ показывает, что выражения внутри скобок берутся как предельные значения на линии DB изнутри треугольников Δ_1 или Δ_2 . Вычитая из суммы равенств (1.59)+(1.60) равенство (1.58), получим:

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_1 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_2 \right\} dt = 0 \text{ или, в силу произвольной малости}$$

дуги DB, найдем:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \cdot \frac{dx}{dt} + c_0^2 \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0, \quad (1.61)$$

где введен оператор величины разрыва(скачка) функции, напр., $\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_2 - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_1$.

Равенства типа (1.61) получили название **динамических условий на кривой слабого разрыва**.

Вычислим производную по времени от величины $\phi(t, x)$ вдоль линии разрыва

производных: $\frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \cdot \frac{dx}{dt}$, где $i = 1, 2$, причем в качестве значений

производных можно брать предельные значения как со стороны Δ_1 , так и Δ_2 . Разность правых частей при $i = 1$ и $i = 2$ в виду непрерывности $\phi(t, x)$ на кривой $x = x(t)$ дает:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (1.62)$$

Равенства типа (1.62) получили название **кинематических условий на кривой** $x = x(t)$ **слабого разрыва**.

Рассмотрим теперь уравнения (1.61) и (1.62) как систему двух уравнений относительно двух неизвестных величин $\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$ и $\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + c_0^2 \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \\ 1 \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \frac{dx}{dt} \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

Как видно из этой однородной системы уравнений (1.63), существование ненулевого решения (ненулевого значения по крайней мере одного из разрывов $\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right], \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]$)

возможно только в случае, если главный определитель системы равен нулю, т. е.

$$\text{если } \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & c_0^2 \\ 1 & \frac{dx}{dt} \end{vmatrix} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - c_0^2 = 0 \quad \text{или, интегрируя, } x = \pm c_0 \cdot t + const.$$

Таким образом, линии разрыва производных решения уравнения (1.56) - линии слабого разрыва, являются характеристиками, что и требовалось доказать. Очевидно, что характеристики также могут являться и линиями гладкости решения уравнения (1.56). Проведенный вывод позволяет сформулировать еще одно **определение характеристик – как линий в фазовой плоскости при постановке начальных условий на которых задача Коши для уравнения (1.56) имеет неединственное решение**. Действительно, мы

показали, что при переходе через характеристику производные $\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}$ могут терпеть

разрыв и, в частности, отличаться от значений на характеристике, следовательно, решение вне характеристики определяемое в ее малой окрестности как сумма

$\phi = \phi|_{\text{на характеристике}} + d\phi$, где $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$ может быть найдено (продолжено в

область вне характеристики) неоднозначно.

Математическое доказательство этого определения характеристик получим чуть позже в дифференциальной форме, путем перехода от одного волнового уравнения с одной искомой функцией $\phi = \phi(t, x)$ к эквивалентной ему линейной системе двух уравнений в

частных производных первого порядка относительно двух искомых функций $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$,

$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, т. е. к исходной линеаризованной системе уравнений (1.26).

Сейчас же покажем, что *характеристики семейств* $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$ – это *линии слабого разрыва искомым функций* p, u *в фазовой плоскости* (t, x) *исходной линеаризованной системы уравнений квазиодномерной газовой динамики:*

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot u \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x}, \quad (1.26.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.26.2)$$

Доказательство: Рассмотрим произвольную дифференцируемую кривую $x = x(t)$ в фазовой плоскости и предположим, что при переходе через эту линию искомые функции $p = p(t, x)$, $u = u(t, x)$ непрерывны, а частные производные от них (по крайней мере хотя бы одна) – разрывны. Примем также, что площадь $S = S(t, x)$ меняется гладким образом при переходе через линию $x = x(t)$.

Отметим индексами 1 и 2 величины по разные стороны линии разрыва производных $x = x(t)$. Тогда $[p] = p_2 - p_1 = 0$, $[u] = u_2 - u_1 = 0$, $[S] = S_2 - S_1 = 0$. Запишем систему уравнений (1.26.1-2) для точек, стремящихся к точке (t, x) кривой $x = x(t)$ со стороны 1 и со стороны 2. В пределе имеем

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{1,2} + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{1,2} = -c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot u(t, x) \cdot \frac{\partial \ln S(t, x)}{\partial x},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{1,2} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{1,2} = 0,$$

Как видим, правая часть в первом уравнении одинакова как для системы уравнений с индексом 1, так и для системы с индексом 2. Вычитая из системы с индексом 2 систему уравнений с индексом 1 получаем динамические условия на кривой слабого разрыва $x = x(t)$:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \quad (Д.У.1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{1}{\rho_0} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (Д.У.2)$$

где, как и прежде, скачок $\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_2 - \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_1$ и т.д.

Получим теперь систему *кинематических условий на кривой* $x = x(t)$ *слабого разрыва.*

Для этого вычислим производную по времени от величин $p(t, x)$ и $u(t, x)$ вдоль линии

разрыва производных: например, $\frac{d}{dt} p(t, x(t)) = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_i + \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \cdot \frac{dx}{dt}$, где $i = 1, 2$, причем в

качестве значений производных можно брать предельные значения как со стороны кривой с индексом 1, так и 2. Разность правых частей при $i = 1$ и $i = 2$ в виду непрерывности функций $p(t, x)$ и $u(t, x)$ на кривой $x = x(t)$ дает:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (К.У.1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{К.У.2})$$

Рассмотрим теперь уравнения (Д.У.1), (Д.У.2), (К.У.1), (К.У.2) как систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных величин $\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right], \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right], \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$:

$$\begin{cases} 1 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \\ 0 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + \frac{1}{\rho_0} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + 1 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \\ 1 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + \frac{dx}{dt} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \\ 0 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + 0 \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + 1 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{dx}{dt} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \end{cases}$$

Для существования ненулевого решения данной линейной однородной алгебраической системы уравнений необходимо, чтобы главный определитель системы $\Delta = 0$. Вычислим его:

$$\begin{aligned} \Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c_0^2 \cdot \rho_0 \\ 0 & 1/\rho_0 & 1 & 0 \\ 1 & dx/dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dx/dt \end{vmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & dx/dt \end{vmatrix} - c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \rho_0 & dx/dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} \right), \text{ где, напомним, } dx, dt \text{ берутся вдоль кривой } x = x(t). \end{aligned}$$

Из условия $\Delta = 0$ получим $dx = \pm c_0 \cdot dt$, что и требовалось доказать.

Подведем некоторые итоги:

1. У линеаризованной системы уравнений квазиодномерной ($S = S(t, x)$) газовой динамики (1.26.1-2) имеется два семейства характеристик $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$.
2. Эти и только эти характеристики семейств $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$ могут быть:
 - а). линиями гладкости решения, если решение гладкое,
 - б). линиями слабого разрыва, если решение – непрерывно, а производные – разрывны. При этом скачки производных связаны между собой системой кинематических (К.У.1-2) и динамических (Д.У.1-2) соотношений на слаб. разрыве,
 - в). линиями сильного разрыва (разрыва первого рода), если решение – разрывно. При этом скачки искомых функций p, u связаны соотношением (С/Р) на сильном разрыве: $[p] - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u] = 0$.

Перейдем теперь к доказательству того факта, что *характеристики семейств* $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$ – это линии в фазовой плоскости (t, x) , при постановке начальных условий на которых задача Коши как для волнового уравнения (1.29.2), так и для системы уравнений (1.26.1-2) имеет неединственное решение.

Для этого перейдем от одного волнового уравнения с одной искомой функцией $\phi = \phi(t, x)$ к эквивалентной ему линейной системе двух уравнений в частных производных первого порядка относительно двух искомых функций $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$, $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Далее для компактности

примем обозначения, что $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$. Тогда указанная система примет вид:

$$\begin{cases} \partial_t(\phi_t) = c_0^2 \cdot \partial_x(\phi_x) \\ \partial_x(\phi_t) = \partial_t(\phi_x) \end{cases} \quad (1.64)$$

первое уравнение в (1.64) – прямое следствие исходного волнового уравнения, второе уравнение – условие равенства смешанных производных – необходимо для того, чтобы указать, что новые искомые функции $\phi_t = \phi_t(t, x)$, $\phi_x = \phi_x(t, x)$ – суть частные производные по разным аргументам одной и той же исходной функции $\phi = \phi(t, x)$.

Заметим, что система (1.64) – это равносильная форма записи исходной линеаризованной системы (1.26.1-2), записанной с учетом формул (1.29.1) для случая $S = const$ в терминах производных от потенциала $\phi = \phi(t, x)$. Поэтому все рассуждения, в которых участвуют ϕ_t , ϕ_x , фактически являются рассуждениями относительно величин давления (возмущения)

$$\frac{P - P_0}{-\rho_0} = \phi_t \quad \text{и скорости (возмущения)} \quad u = \phi_x.$$

Вначале поставим задачу нахождения непрерывно дифференцируемого решения $\phi_t = P(t, x)$, $\phi_x = U(t, x)$ системы (1.64) в окрестности произвольной дифференцируемой кривой $x = \alpha(t)$, на которой заданы значения функций $P(t, x) = P(t, \alpha(t))$, $U(t, x) = U(t, \alpha(t))$ (т. е. поставим задачу Коши для системы (1.64) на произвольной кривой $x = \alpha(t)$). Задание начальных значений искомых функций на кривой $x = \alpha(t)$ позволяет вычислить значение производной от искомых решений вдоль кривой, но этого недостаточно для того, чтобы определить решение в окрестности кривой. Действительно, решение в точке расположенной вблизи нашей кривой может быть вычислено как сумма значений решения на кривой $P(t, \alpha(t))$ или $U(t, \alpha(t))$ плюс приращение dP или dU , где dP и dU определяются из соотношений (1.65) по известным значениям приращений координат dt или dx из точки кривой $(t, \alpha(t))$ до выбранной точки вне кривой $(t + dt, \alpha(t) + dx)$ и значениям частных производных $\partial_t(P)$, $\partial_x(P)$, $\partial_t(U)$, $\partial_x(U)$ в точке кривой $(t, \alpha(t))$.

$$\begin{cases} \partial_t(P) \cdot dt + \partial_x(P) \cdot dx = dP \\ \partial_t(U) \cdot dt + \partial_x(U) \cdot dx = dU \end{cases} \quad (1.65)$$

Рассматривая теперь систему (1.65), как систему уравнений для определения $\partial_t(P)$, $\partial_x(P)$, $\partial_t(U)$, $\partial_x(U)$ на кривой $x = \alpha(t)$ (т.е. когда: 1).известны dP , dU , 2). dt и

dx связаны между собой требованием $dx = \frac{d\alpha}{dt} \cdot dt$) мы вынуждены признать, что двух уравнений (1.65) недостаточно для вычисления 4-х производных. И здесь нам на помощь приходит система (1.64) если принять, что она выполняется не только для точек вне кривой $x = \alpha(t)$, но и для точек, принадлежащих этой кривой.

Выпишем эту линейную, неоднородную алгебраическую систему 4-х уравнений (1.64), (1.65) относительно 4-х неизвестных $\partial_t(P), \partial_x(P), \partial_t(U), \partial_x(U)$, выполненную для каждой точки (t, x) кривой $x = \alpha(t)$. Для удобства дальнейших выкладок выпишем в каждом из уравнений этой системы все неизвестные даже если они имеют нулевые коэффициенты:

$$\begin{cases} 1 \cdot \partial_t(P) + 0 \cdot \partial_t(U) + 0 \cdot \partial_x(P) - c_0^2 \cdot \partial_x(U) = 0 \\ 0 \cdot \partial_t(P) - 1 \cdot \partial_t(U) + 1 \cdot \partial_x(P) + 0 \cdot \partial_x(U) = 0 \\ dt \cdot \partial_t(P) + 0 \cdot \partial_t(U) + dx \cdot \partial_x(P) + 0 \cdot \partial_x(U) = dP \\ 0 \cdot \partial_t(P) + dt \cdot \partial_t(U) + 0 \cdot \partial_x(P) + dx \cdot \partial_x(U) = dU \end{cases} \quad (1.66)$$

Для существования и единственности решения линейной алгебраической системы уравнений (1.66) с неизвестными $\partial_t(P), \partial_x(P), \partial_t(U), \partial_x(U)$ необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы $\Delta \neq 0$. Вычислим его:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_0^2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + c_0^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ dt & 0 & dx \\ 0 & dt & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (dx)^2 + c_0^2 \cdot (dt)^2, \text{ где, напомним, } dx, dt \text{ берутся вдоль кривой } x = \alpha(t).$$

Условие $\Delta \neq 0$ означает, что $dx \neq \pm c_0 \cdot dt$, т. е., что $\frac{d\alpha}{dt} \neq \pm c_0$ или, другими словами, что кривая $x = \alpha(t)$ не является характеристикой.

Итак, решение задачи нахождения непрерывно дифференцируемого решения $\phi_t = P(t, x)$, $\phi_x = U(t, x)$ системы (1.64) в окрестности произвольной дифференцируемой кривой $x = \alpha(t)$, на которой заданы значения функций $P(t, x) = P(t, \alpha(t))$, $U(t, x) = U(t, \alpha(t))$, существует и единственно, если кривая $x = \alpha(t)$ не является характеристикой.

Возникает естественный вопрос: как быть, если все-таки кривая $x = \alpha(t)$ является характеристикой? Ответ на этот вопрос отчасти был дан нами ранее, когда мы установили, что характеристики – суть линии распространения как слабых, так и сильных разрывов искомых функций, т. е. линии, на которых возможна “сшивка” решений. Поэтому, принимая в нашем случае условие $\Delta = 0$, мы должны потребовать равенство нулю и всех 4-х вспомогательных определителей $\Delta_i = 0$, где $i = 1 \div 4$, тем самым, отказавшись от требования единственности решения. В противном случае система (1.66) будет несовместной, а, значит, и исходная задача не будет иметь решения. Вычислим Δ_i , где $i = 1 \div 4$:

$$\Delta_1 = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_0^2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ dP & 0 & dx & 0 \\ dU & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = c_0^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ dP & 0 & dx \\ dU & dt & 0 \end{vmatrix} = c_0^2 \cdot (dP \cdot dt - dU \cdot dx)$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_0^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dt & dP & dx & 0 \\ 0 & dU & 0 & dx \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ dP & dx & 0 \\ dU & 0 & dx \end{vmatrix} + c_0^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ dt & dP & dx \\ 0 & dU & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot dP \cdot dx + c_0^2 \cdot dU \cdot dt$$

$$\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_0^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dP & 0 \\ 0 & dt & dU & dx \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & dP & 0 \\ dt & dU & dx \end{vmatrix} + c_0^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ dt & 0 & dP \\ 0 & dt & dU \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot dP \cdot dx + c_0^2 \cdot dU \cdot dt$$

$$\Delta_4 = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ dt & 0 & dx & dP \\ 0 & dt & 0 & dU \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & dx & dP \\ dt & 0 & dU \end{vmatrix} = dP \cdot dt - dU \cdot dx$$

Условия $\Delta_i = 0, i = 1 \div 4$, дают, на первый взгляд, только два независимых уравнения

$$\begin{cases} dP \cdot dt - dU \cdot dx = 0 \\ -1 \cdot dP \cdot dx + c_0^2 \cdot dU \cdot dt = 0 \end{cases} \text{ или, т. к. на нашей кривой } dx = \pm c_0 \cdot dt, \text{ получаем:}$$

$$\begin{cases} (dP \mp c_0 \cdot dU) \cdot dt = 0 \\ (dP \mp c_0 \cdot dU) \cdot dt = 0 \end{cases} \text{ т. е. мы имеем лишь одно независимое уравнение}$$

$(dP \mp c_0 \cdot dU) \cdot dt = 0$ при условии $dx = \pm c_0 \cdot dt$. Выпишем оба этих условия в виде системы,

$$\text{полагая, что } dt \neq 0, \begin{cases} dx \mp c_0 \cdot dt = 0 \\ dP \mp c_0 \cdot dU = 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

Оба уравнения системы (1.67) легко интегрируются в конечном виде:

$$\begin{cases} x = \pm c_0 \cdot t + const \\ P \mp c_0 \cdot U = CONST \end{cases} \quad (1.68)$$

Итак, подведем итоги: если кривая $x = \alpha(t)$ является характеристикой, т. е. если $x = \pm c_0 \cdot t + const$, то для существования решения задачи Коши н. и д., чтобы вдоль

характеристик $x = \pm c_0 \cdot t + const$ (условия направлений в пространстве) выполнялись условия совместности для заданных на этой характеристике начальных данных P и U : $P \mp c_0 \cdot U = CONST$. В этом случае, решение задачи Коши с начальными данными на характеристике существует, но не единственно.

Итак, мы доказали, что характеристики волнового уравнения – это линии в фазовой плоскости при постановке начальных условий на которых задача Коши для волнового уравнения имеет неединственное решение.

Примеч., перепишем для наглядности соотношения (1.68) для каждой из характеристик в отдельности в терминах исходных функций $\phi_t = P(t, x)$, $\phi_x = U(t, x)$:

$$\begin{cases} x = c_0 \cdot t + C_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} - c_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = C_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -c_0 \cdot t + C_3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = C_4 \end{cases}, \text{ где } C_i, i = 1 \div 4 - \text{ постоянные. (1.69)}$$

Отметим одно важное обстоятельство: в условиях совместности вдоль характеристик (вторые соотношения в каждой из систем (1.69)) имеется скрытая зависимость следующего вида $C_2 = C_2(C_1)$ и $C_4 = C_4(C_3)$, т. е. при переходе от одной характеристики к другой (изменяя величину постоянной C_1 или C_3) мы согласованно получаем новое значение постоянной C_2 или C_4 .

Условия направлений и совместности на характеристиках семейств C_+ и C_- вида (1.69) позволяют получить еще одно важное свойство исходной линеаризованной системы уравнений газовой динамики (1.26.1)-(1.26.2) для плоского случая $S(t, x) = const$.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.26.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.26.2)$$

где c_0 , ρ_0 - константы.

Имея в виду, что $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$, умножим условия совместности на “ $-\rho_0$ ”,

$$\text{получим } \begin{cases} x = \pm c_0 \cdot t + C_{1,3} \\ -\rho_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \pm \rho_0 \cdot c_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \tilde{C}_{2,4} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \pm c_0 \cdot t + C_{1,3} \\ p \pm \rho_0 \cdot c_0 \cdot u = \tilde{C}_{2,4} \end{cases},$$

где $\tilde{C}_{2,4} = -\rho_0 \cdot C_{2,4} + p_0$ - постоянные величины (константы). Или, преобразовав,

$$\begin{cases} x = \pm c_0 \cdot t + C_{1,3} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} \pm u \right) = \hat{C}_{2,4} \end{cases}, \text{ где постоянная } \hat{C}_{2,4} = \frac{\tilde{C}_{2,4}}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0} \quad (1.71)$$

Т. о., комбинация $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} \pm u \right)$ **сохраняется вдоль характеристики** $x \mp c_0 t = C_{1,3}$, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} + u \right) = f(x - c_0 t), \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} - u \right) = g(x + c_0 t). \quad (1.72)$$

Соотношение (1.72) выполнено для гладких решений. В случае сильного разрыва (разрыва первого рода), как было показано ранее, скачки искомых функций p, u связаны

соотношением (С/Р) на сильном разрыве: $[p] - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u] = 0$ или, раскрывая оператор

скачка, $p_2 - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u_2 = p_1 - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u_1$. Вспомнив теперь, что в линейной постановке

сильные разрывы распространяются по характеристикам получим

$$\begin{cases} x \mp c_0 t = C_{1,3} \\ p_2 \mp \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_2 = p_1 \mp \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \mp c_0 t = C_{1,3} \\ \frac{p_2}{\rho_0 \cdot c_0} \mp u_2 = \frac{p_1}{\rho_0 \cdot c_0} \mp u_1 \end{cases}, \text{ т. е.}$$

при переходе через характеристику $x \mp c_0 t = C_{1,3}$ **сохраняется** $\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} \mp u$. Сравнивая

с (1.72) получим, что **величина** $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} \mp u \right)$ **сохраняет свое постоянное значение**

вдоль соотв. характеристики $x \pm c_0 t = const$ **как для гладких, так и разрывных типов решений**, т.е. инвариантна на соотв. характеристике.

Введение в метод (u, p) - диаграмм.

При постановке, анализе и решении многих газодинамических задач (как в рассматриваемой нами линейной, так и в общей нелинейной постановке) используется специальный метод (u, p) - диаграмм. Эти диаграммы описывают состояния движения (u, p) , в которые может перейти данное состояние движения (u_*, p_*) , в результате прохождения какой-либо волны. Где в качестве волны может быть, как мы уже установили выше, либо волна слабого разрыва, получившая название волны разрежения (сжатия), либо волна сильного разрыва - ударная волна. При этом плоскость переменных $R^2(u, p)$ называется плоскостью состояний движения. Дадим два определения:

Определение 1: (u, p) - диаграммой волн разрежения (сжатия) с центром (u_*, p_*)

называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p) за волнами разрежения (сжатия), имеющими состояние (u_*, p_*) перед волной.

Условия (1.72) на линии (волне) слабого разрыва позволяют без труда получить уравнения (u, p) - диаграмм волн разрежения (сжатия) с центром (u_*, p_*) в виде:

Для волны разрежения (сжатия), распространяющейся влево ($C_- : \frac{dx}{dt} = -c_0$),

$$\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} + u = \frac{p_*}{\rho_0 \cdot c_0} + u_* \quad (1.72.1)$$

Для волны разрежения (сжатия), распространяющейся вправо ($C_+ : \frac{dx}{dt} = c_0$),

$$\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} - u = \frac{p_*}{\rho_0 \cdot c_0} - u_* \quad (1.72.2)$$

Графически полная диаграмма волн разрежения (сжатия) представляет из себя пару прямых, проходящих через точку (u_*, p_*) , тангенсы углов наклона которых равны $\pm \rho_0 \cdot c_0$, и изображена на Рис. 1.72. Участки прямых, на которых $p > p_*$, соответствуют волнам сжатия, а участки, на которых $p < p_*$, - волнам разрежения.

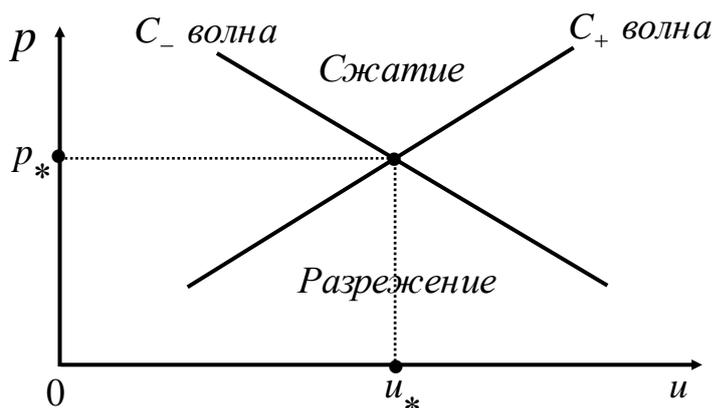


Рис. 1.72

Определение 2: (u, p) - диаграммой ударных волн с центром (u_*, p_*) называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p) , в которые состояние (u_*, p_*) может перейти в ударных волнах.

Условия на сильном разрыве $[p] - \rho_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot [u] = 0$, где $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$, позволяют без труда получить уравнения (u, p) - диаграмм волн разрежения (сжатия) с центром (u_*, p_*) в виде:

Для ударной волны, распространяющейся влево ($C_- : \frac{dx}{dt} = -c_0$),

$$\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} + u = \frac{p_*}{\rho_0 \cdot c_0} + u_* \quad (1.72.3)$$

Для ударной волны, распространяющейся вправо ($C_+ : \frac{dx}{dt} = c_0$),

$$\frac{p}{\rho_0 \cdot c_0} - u = \frac{p_*}{\rho_0 \cdot c_0} - u_* \quad (1.72.4)$$

Графически полная диаграмма ударных волн представляет из себя пару прямых, проходящих через точку (u_*, p_*) , тангенсы углов наклона которых равны $\pm \rho_0 \cdot c_0$, и изображена на Рис. 1.73. Участки прямых, на которых $p > p_*$, соответствуют ударным волнам сжатия (УВ сжатия, распространяющаяся вправо (траектория C_+) и влево (траектория C_-)), а участки, на которых $p < p_*$, - ударным волнам разрежения (УВ разрежения).

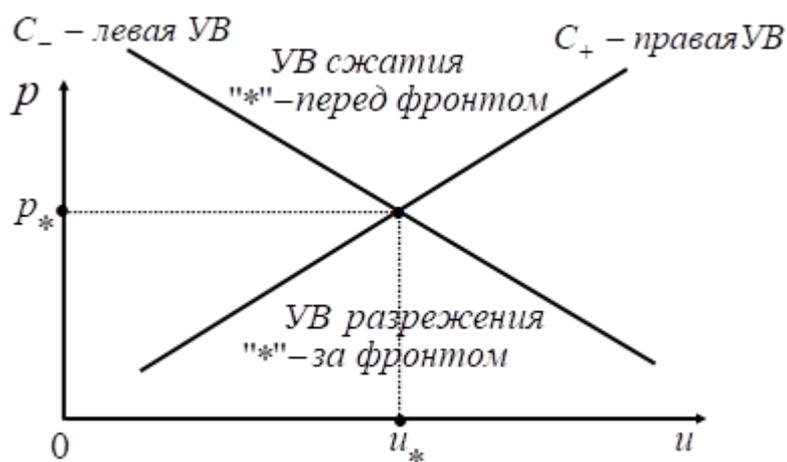


Рис. 1.73

Как уже отмечалось выше, уравнения (1.72.3) и (1.72.4) для случая ударных волн совпадают по написанию с уравнениями (1.72.1), (1.72.2) для случая волн разрежения (сжатия), но описывают при этом разные процессы – в волнах разрежения (сжатия) величины (u, p) при переходе через фронт волны меняются непрерывно, а в ударных волнах разрежения (сжатия) – разрывно. Причина этого на первый взгляд парадоксального совпадения состоит в следующем – изображенные на Рис. 1.72-73 прямые – суть касательные к кривым (u, p) диаграммы для исходной (нелинейной) модели газовой динамики в точке (u_*, p_*) , причем угол наклона этих касательных в точке (u_*, p_*) как в случае волн разрежения (сжатия), так и ударных волн одинаков (более того, как вам будет показано в курсе лекций по газовой динамике касание (u, p) диаграмм простых и ударных волн имеет второй порядок, т. е. кривые имеют не только одинаковый наклон, но и одинаковую кривизну). Аппроксимация исходных нелинейных зависимостей $p = p(u)$ их касательными в окрестности рассматриваемой точки (u_*, p_*) - суть процесса линеаризации исходной нелинейной модели (так называемое акустическое приближение). В ходе этой линеаризации мы приобретаем некоторые свойства не присущие исходной модели, напр., в нелинейной постановке согласно теореме Цемплена для нормальных сред

возможны только ударные волны сжатия. В линейной постановке, как мы уже видели, возможны как ударные волны сжатия, так и ударные волны разрежения.

Рассмотрим в качестве примера применения метода (u, p) диаграмм задачу, содержащую сильный разрыв в начальных данных (частный случай задачи о распаде произвольного разрыва), для случая плоских волн ($S(t, x) = const$).

Задача. Зададим начальные условия для задачи Коши в виде:

$$p' = p(0, x) - p_0 = \begin{cases} P & \text{при } x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}, \text{ где } P = const > 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Данные начальные условия моделируют покоящийся газ, разделенный на две части перегородкой (разрывом в начальных данных), в левой части задано возмущение давления P . При $t = 0$ перегородка убирается. Задача найти решение при $t > 0$.

Для решения задачи представим в одних осях (на одном графике) (u, p) диаграммы для газа, находящегося как слева от перегородки, так и справа (исходные точки (u_*, p_*) в данном случае будут $(0, 0)$ и $(0, P)$).

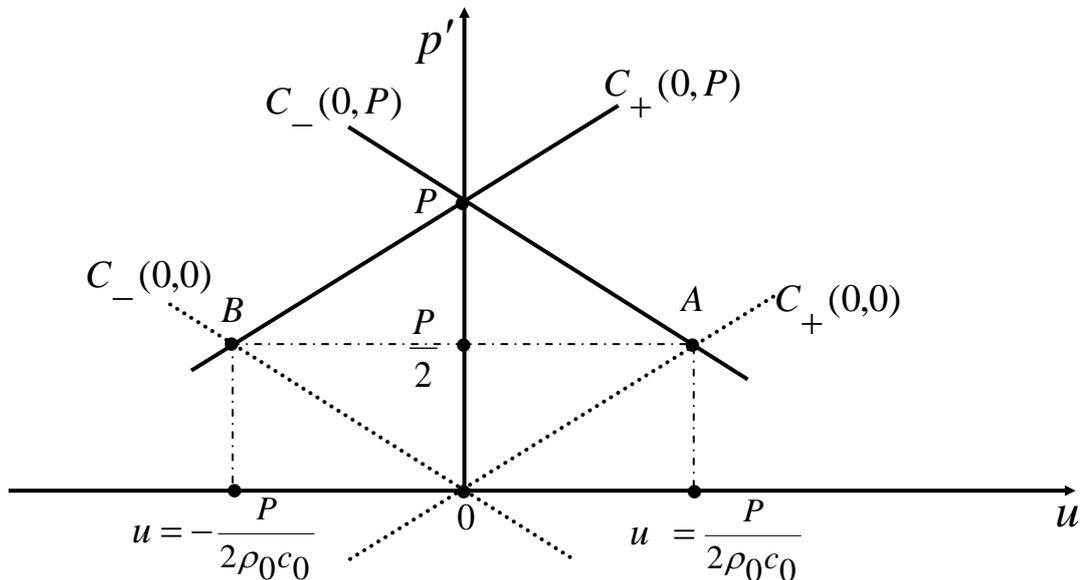
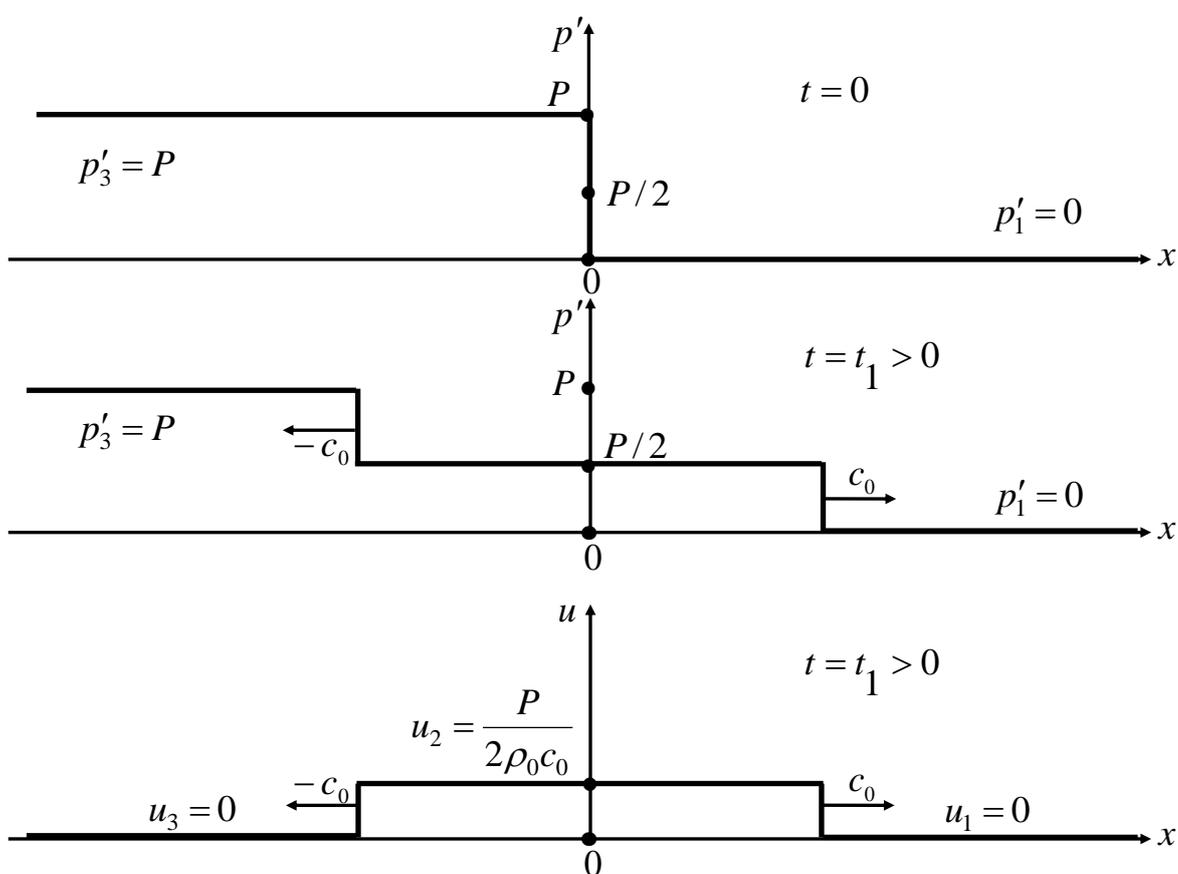


Рис. 1.74

На Рис 1.74 точки обеих сплошных линий, проходящих через т. $(0, P)$, суть множество возможных состояний (u, p) , в которые газ, расположенный слева от перегородки, может перейти, находясь первоначально в состоянии $(0, P)$, как в результате непрерывного, так и ударного перехода (т. к. кривые (u, p) диаграмм для ударных волн и волн разрежения (сжатия) в линейной приближении совпадают). Аналогично точки пунктирных линий, проходящих через т. $(0, 0)$, суть множество возможных состояний (u, p) , в которые газ, расположенный справа от перегородки, может перейти, находясь первоначально в состоянии $(0, 0)$, как в результате непрерывного, так и ударного перехода. Как видно из Рис. 1.74 сплошные и пунктирные линии пересекаются в двух точках A и B . Координаты точки A пересечения прямых, которые находятся по известным уравнениям прямых, суть решение нашей задачи. Точка B , симметричная точке A относительно оси ординат, – решение задачи в случае если расположение газов относительно перегородки поменять местами. Из значений координат точки A $(P/2, P/(2\rho_0 c_0))$ следует, что вправо по

покоящемуся газу с пониженным давлением $p = 0$ побежит со скоростью c_0 ударная волна сжатия, поднимающая давление в нем на величину $P/2$ и разгоняющая ранее покоящийся газ до скорости $u = P/(2\rho_0 c_0)$. Соответственно влево по покоящемуся газу с повышенным давлением $p = P$ побежит со скоростью $-c_0$ ударная волна разрежения, понижающая давление в нем на величину $P/2$ и разгоняющая ранее покоящийся газ до скорости $u = P/(2\rho_0 c_0)$. Ниже представлены эпюры давления и скорости в начальный момент времени и в некоторый момент времени после убирания перегородки (эпюра скорости в начальный момент ($u \equiv 0$) не изображена на рисунке).



Чуть позже решение этой задачи будет получено вторым способом, получившим название метода инвариантов Римана.

Инварианты Римана для линеаризованной системы уравнений одномерной газовой динамики для случая плоской симметрии.

$$S(t, x) = const$$

Введем новые неизвестные функции $2 \cdot r = \frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} + u$ и $2 \cdot s = \frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} - u$,

получившие название **инварианты Римана**. Тогда условия совместности в системе (1.71) переписутся в виде

$$\begin{cases} x = c_0 \cdot t + C_1 \\ r = \hat{C}_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -c_0 \cdot t + C_3 \\ s = \hat{C}_4 \end{cases}, \text{ где } C_{1,3} \text{ и } \hat{C}_{2,4} - \text{ постоянные} \quad (1.73)$$

Вернемся к нашей исходной линеаризованной системе (1.26):

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение этой системы на $\frac{1}{\rho_0 \cdot c_0}$ и сложим со вторым, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} + u \right) + c_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} + u \right) = 0$$

Теперь из первого вычтем второе, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} - u \right) - c_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} - u \right) = 0$$

Вспомним определение новых функций $2 \cdot r = \frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} + u$ и $2 \cdot s = \frac{P}{\rho_0 \cdot c_0} - u$, тогда получим для r и s систему

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} - c_0 \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.74)$$

Как уже отмечалось, функции r и s называются **инвариантами Римана**. Вдоль каждой характеристики неизменны вдоль C_+ — инвариант r , вдоль C_- — инвариант s .

$$2 \cdot r = \frac{P}{c_0 \cdot \rho_0} + u = 2 \cdot f(x - c_0 t)$$

$$2 \cdot s = \frac{P}{c_0 \cdot \rho_0} - u = 2 \cdot g(x + c_0 t)$$

т. к. вдоль C_+ имеем $dr = \frac{\partial r}{\partial t} dt + \frac{\partial r}{\partial x} dx$, где $dx = +c_0 \cdot dt$ или

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{C_+} = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{C_+} = \frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = 0; \text{ Аналогично } \left. \frac{ds}{dt} \right|_{C_-} = \frac{\partial s}{\partial t} - c_0 \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Итак, постоянное значение r распространяется вправо со скоростью $c_0 = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}$,

постоянное значение s распространяется влево со скоростью c_0 . Величину c_0 называют скоростью распространения звуковой волны или, сокращенно, **скоростью звука**.

В нашем линейном случае все характеристики C_+ параллельны, поэтому все возмущения r идут с одной и той же скоростью c_0 , т. е. возмущения для r идут без искажения. Аналогично для $2s = 2g(x + c_0 t) = \frac{p}{c_0 \rho_0} - u$ постоянные значения s идут по

C_- - характеристикам со скоростью c_0 влево без искажения. Зная r и s , получим

$$u = r - s = f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t) \quad (1.75)$$

$$p = \rho_0 \cdot c_0 \cdot (r + s) = \rho_0 \cdot c_0 \cdot [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)] \quad (1.76)$$

Конечно, по известному значению давления (1.76) можно найти и плотность

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{c_0^2} (p - p_0) = \frac{\rho_0}{c_0} \cdot [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)] - \frac{p_0}{c_0^2}$$

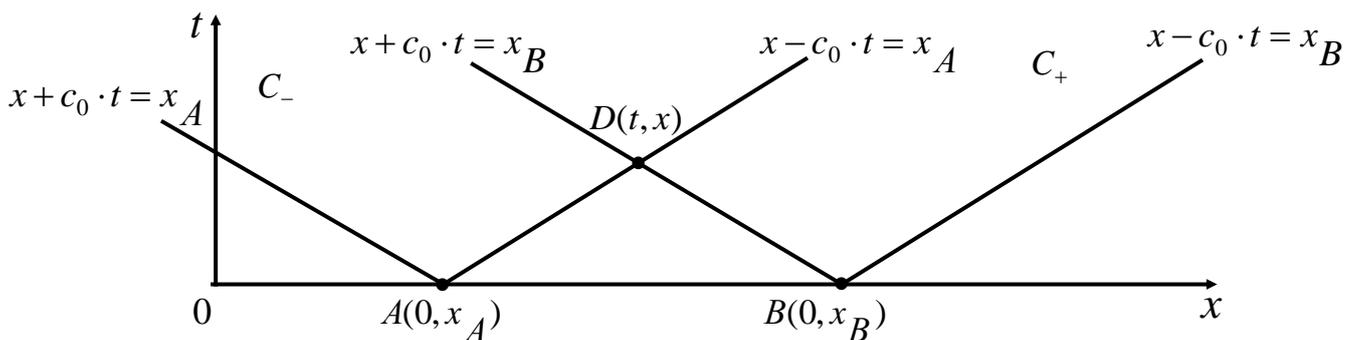


Рис. 2.6

На Рис. 2.6 изображен характеристический треугольник $\triangle ABD$ и характеристики обоих семейств.

Попробуем теперь определить функции f и g таким образом, чтобы полученное решение (1.75), (1.76) удовлетворяло условиям задачи Коши при задании начальных значений u и p на отрезке AB (или на всей оси Ox).

Решение задачи Коши для линейной системы при помощи инвариантов Римана.

Начальные данные (при $t = 0$).

$$u(0, x) = \tilde{\psi}(x) \text{ на } AB \text{ (или на всей оси } Ox),$$

$$p(0, x) = \tilde{\Phi}(x) \text{ на } AB \text{ или на всей оси } Ox.$$

Решение: Из (1.75), (1.76) при $t = 0$ имеем:

$$u(0, x) = f(x) - g(x) = \tilde{\psi}(x),$$

$$\frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} p(0, x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \tilde{\Phi}(x).$$

Сложим эти два уравнения и разделим на двойку, получим

$$r(0, x) = f(x) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\psi}(x) + \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \tilde{\Phi}(x) \right].$$

Затем вычтем 1-ое уравнение из 2-го и разделим на два, получим

$$s(0, x) = g(x) = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\psi}(x) + \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \tilde{\Phi}(x) \right].$$

При $t > 0$, учитывая, что r постоянен вдоль C_+ и s постоянен вдоль C_- получим:

$$r(t, x) = f(x - c_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\psi}(x - c_0 t) + \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \tilde{\Phi}(x - c_0 t) \right],$$

$$s(t, x) = g(x + c_0 t) = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\psi}(x + c_0 t) + \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \tilde{\Phi}(x + c_0 t) \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(t, x) &= r(t, x) - s(t, x) = f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\psi}(x - c_0 t) + \tilde{\psi}(x + c_0 t) \right] + \frac{1}{2\rho_0 \cdot c_0} \cdot \left[\tilde{\Phi}(x - c_0 t) - \tilde{\Phi}(x + c_0 t) \right] \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 \cdot c_0 \cdot (r + s) = \rho_0 \cdot c_0 \cdot \left[f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \right] = \\ &= \frac{\rho_0 \cdot c_0}{2} \cdot \left[\tilde{\psi}(x - c_0 t) - \tilde{\psi}(x + c_0 t) \right] + \frac{1}{2} \left[\tilde{\Phi}(x - c_0 t) + \tilde{\Phi}(x + c_0 t) \right] \end{aligned}$$

Получили решение задачи Коши, когда заданы начальные данные на отрезке AB (или на всей оси x) для возмущения давления p и возмущения скорости u .

Сравним полученное решение (1.77) с найденным ранее решением аналогичной задачи Коши для волнового уравнения относительно потенциала скорости $\phi(t, x)$:

в дифференциальной форме $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ для гладкой $\phi(t, x) \in C^2$

или в интегральной форме $\oint_{\partial G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) dx + c_0^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) dt \right) = 0$ для кусочно-гладкой

$\phi(t, x) \in C^1$.

Начальные условия для обоих типов уравнений одинаковы:

$$\phi(0, x) = \psi(x) \quad (1.34.2)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi(x)$$

Решение для обоих типов уравнений с начал. условиями (1.34.2) имеет одинаковый вид:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \Phi(z) dz \quad (1.35)$$

Вспомнив дифф. связи между ϕ, u, p вида $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$, (**)

найдем из решения (1.35) искомые производные $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \phi}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) + \frac{1}{2c_0} (\Phi(x + c_0 t) - \Phi(x - c_0 t)) = \\ &= \frac{1}{2} (\psi'(x - c_0 t) + \psi'(x + c_0 t)) + \frac{1}{2c_0} (\Phi(x + c_0 t) - \Phi(x - c_0 t)) \end{aligned} \quad (1.78)$$

где символом штрих обозначена обыкновенная производная, $\xi = x - c_0 t$, $\eta = x + c_0 t$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{1}{2c_0} (c_0 \cdot \Phi(x + c_0 t) - (-c_0) \cdot \Phi(x - c_0 t)) = \\ &= \frac{1}{2} ((-c_0) \cdot \psi'(x - c_0 t) + c_0 \cdot \psi'(x + c_0 t)) + \frac{1}{2} (\Phi(x + c_0 t) + \Phi(x - c_0 t)) \end{aligned} \quad (1.79)$$

Установим связь между начальными функциями $\psi(x) = \phi(0, x)$, $\Phi(x) = \left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0}$ и

функциями $\tilde{\psi}(x) = u(0, x)$, $\tilde{\Phi}(x) = p(0, x)$. Из (***) следует, что $\psi'(x) = \tilde{\psi}(x)$ и

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\rho_0} (\tilde{\Phi}(x) - p_0).$$

Тогда, подставляя в формулы (1.78) и (1.79) найденную связь между начальными функциями и учитывая (***) мы получим формулы (1.77), что окончательно подтверждает совпадение полученных разными путями решений одной и той же задачи Коши.

Заметим, что все приведенные выше рассуждения и выкладки, связанные с инвариантами Римана, сохраняют свою силу при замене участвующих в них исходных переменных на их возмущения. Это связано с тем, что как возмущения, так и сами переменные удовлетворяют одинаковым системам дифференциальных уравнений (1.25) и (1.26) при условии, что невозмущенное состояние газа соответствует состоянию покоя с постоянными значениями давления, плотности и равной нулю скорости.

Таким образом, в переменных возмущений p' и $u = u'$ (т.к. $u_0 \equiv 0$) мы имеем:

$$2 \cdot r' = \frac{p'}{\rho_0 \cdot c_0} + u, \quad 2 \cdot s' = \frac{p'}{\rho_0 \cdot c_0} - u \quad \text{и, как следствие постоянства инвариантов Римана вдоль}$$

соответствующих характеристик, получаем решения в виде суммы бегущих волн

$$u = u' = r' - s' = f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t),$$

$$p' = \rho_0 \cdot c_0 \cdot (r' + s') = \rho_0 \cdot c_0 \cdot [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)].$$

Рассмотрим несколько примеров, в которых для удобства иллюстрации основных свойств решений мы используем не сами исходные переменные, а их возмущения:

1. Рассмотрим частный случай, когда во всей области $s' = \frac{1}{2} \left(\frac{p'}{\rho_0 c_0} - u \right) \equiv 0$ (т.е. когда $s \equiv \frac{p_0}{2\rho_0 c_0}$). В этом случае $2s' = 2g = \frac{p'}{\rho_0 c_0} - u = 0$, во всей области. Такое частное решение называется особым, т. к., в отличие от общей постановки задачи Коши, в нашем случае начальные условия при $t = 0$ не могут быть заданы произвольно. Для рассматриваемого примера $u = u(p)$, поэтому произвольно $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ задать нельзя. Зададим, например,

$$p'(0, x) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x), & \text{на } AB, x_A \leq x \leq x_B \\ 0, & \text{вне } AB \end{cases} \Rightarrow u(0, x) = \begin{cases} \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\rho_0 c_0} = \tilde{\psi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}$$

Причем потребуем, чтобы начальные функции $p'(0, x), u(0, x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Т. к. $s' \equiv 0$ во всей области \Rightarrow 1). $u = \frac{p'}{\rho_0 c_0}$ во всей области,

$$2). r' = f(x - c_0 t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \tilde{\Phi}(x - c_0 t)$$

Поэтому

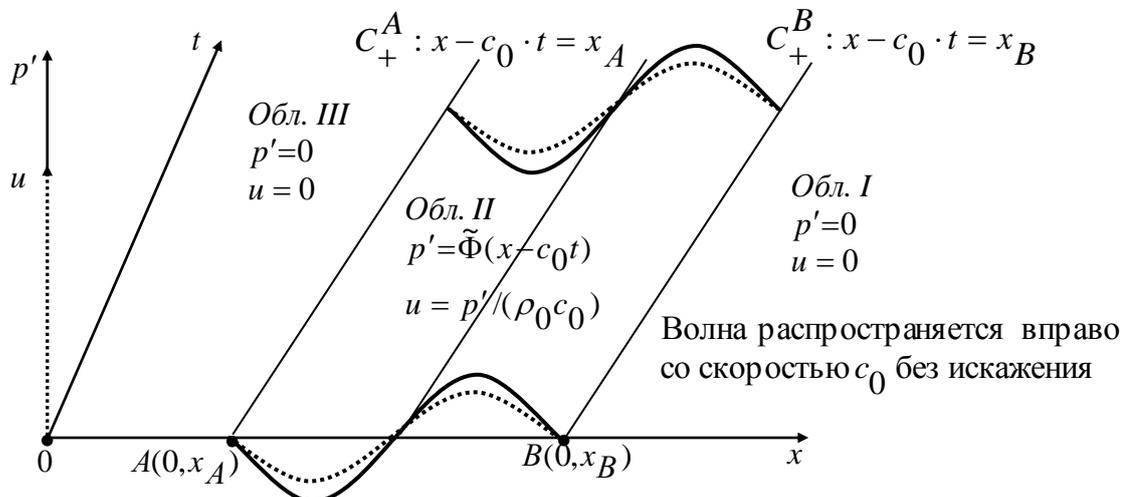
$$p' = \rho_0 c_0 (r' + s') = \rho_0 c_0 r' = \rho_0 c_0 f(x - c_0 t) = \tilde{\Phi}(x - c_0 t)$$

$$u = r' - s' = r' = f(x - c_0 t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \tilde{\Phi}(x - c_0 t).$$

Это, конечно, следует и из общего решения, напр., для величины возмущения скорости u

$$u = \frac{1}{2} \tilde{\psi}(x - c_0 t) + \frac{1}{2\rho_0 c_0} \tilde{\Phi}(x - c_0 t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \tilde{\Phi}(x - c_0 t).$$

В этом случае вдоль каждой характеристики $C_+ : x - c_0 t = x_0$ не только $r' = \text{const}$, но и значения p' , u также постоянны. Т. е. полученное решение обладает тем свойством, что p' и u распространяются вправо со скоростью c_0 без искажения, т. к. все характеристики C_+ параллельны. Это особое решение называется **простой волной отражения вперед** (в линейной постановке прямая волна). В этом случае волна движется вправо со скоростью звука c_0 .

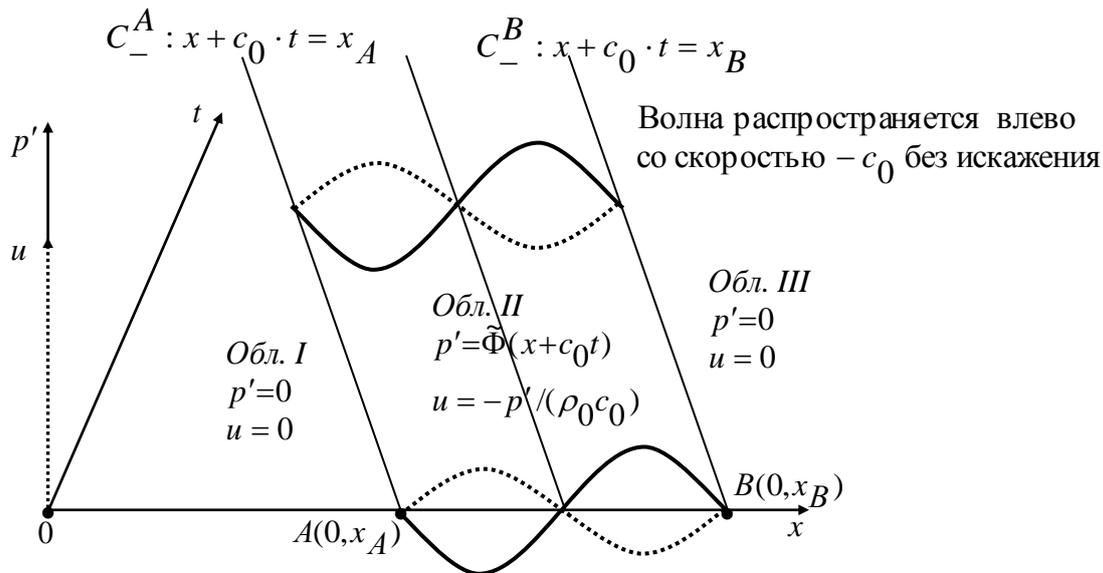


2. Рассмотрим теперь случай, когда во всей области $r' \equiv 0$. В этом случае $u = -\frac{p'}{\rho_0 c_0}$.

Рассмотрим задачу Коши при $t = 0$:

$$p'(x, 0) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases} \Rightarrow u(0, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x) = -\frac{\tilde{\Phi}(x)}{\rho_0 c_0} & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}$$

где $p'(0, x), u(0, x) \in C^1(-\infty, \infty)$



В обл. I и III – состояние покоя. В полосе II между обл. I и III: $p' = \tilde{\Phi}(x + c_0 t)$, $u = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \tilde{\Phi}(x + c_0 t)$. Для этого особого решения ($r' \equiv 0$) вдоль характеристик C_- не только $s' = \text{const}$, но и p' , u также постоянны. Это решение называется **простой волной, обращенной назад** (в линейной постановке обратная волна). Т. е. полученное решение обладает тем свойством, что p' и u распространяются влево со скоростью c_0 без искажения.

3. Рассмотрим частное решение *не особого типа*. Пусть при $t = 0$ на отрезке AB независимо заданы обе начальные функции $\tilde{\Phi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$. Предположим, что $\tilde{\psi}(x) \equiv 0$. Тогда начальные условия в задаче Коши запишутся в виде:

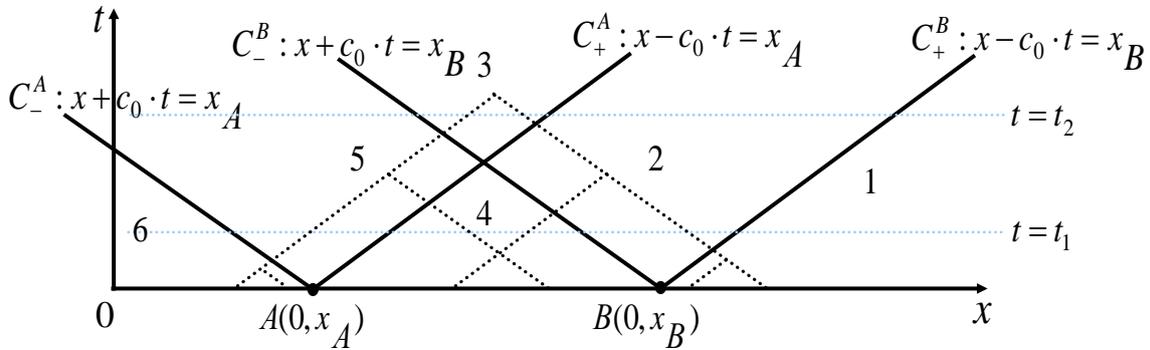
$$p'(0, x) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}, u(0, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x) \equiv 0 & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}$$

где $p'(0, x), u(0, x) \in C^1(-\infty, \infty)$

Итак, заданы две гладкие функции $\tilde{\Phi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x) \equiv 0$ при $t = 0$, т. е. в начальный момент времени скорость газа везде равна 0 и задано ненулевое возмущение давления на участке AB . Формально найденное решение дает следующие выражения для p' и u :

$$p' = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - c_0 t) + \tilde{\Phi}(x + c_0 t)], \quad u = \frac{1}{2\rho_0 c_0} [\tilde{\Phi}(x - c_0 t) - \tilde{\Phi}(x + c_0 t)].$$

Более подробно исследуем решение в характеристическом треугольнике (зона 4). При $t = 0$ на отрезке AB имеем $2r' = \frac{p'}{\rho_0 c_0} + u = \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\rho_0 c_0}$, $2s' = \frac{p'}{\rho_0 c_0} - u = \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\rho_0 c_0}$.

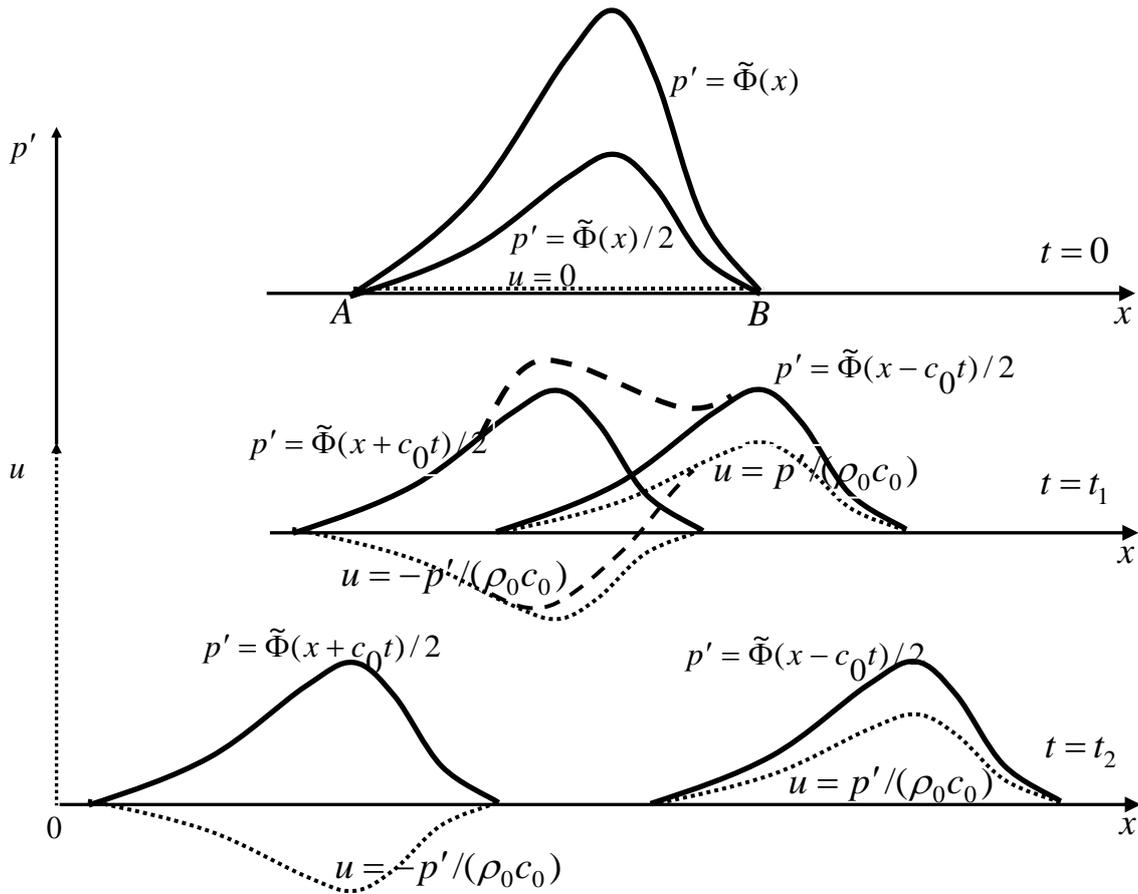


Итак, вдоль ∇ хар-ки C_+ , исходящей из отрезка AB , $C_+ : r' = \tilde{\Phi}(x - c_0 t) / (2\rho_0 c_0)$,
 вдоль ∇ хар-ки C_- , исходящей из отрезка AB , $C_- : s' = \tilde{\Phi}(x + c_0 t) / (2\rho_0 c_0)$,
 вдоль ∇ хар-ки C_+ , исходящей из точек вне отрезка AB , $C_+ : r' = 0$,
 вдоль ∇ хар-ки C_- , исходящей из точек вне отрезка AB , $C_- : s' = 0$.

Поэтому для ∇ точки (t, x) обл. 4 имеем:

$$p' = \rho_0 c_0 (r' + s') = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - c_0 t) + \tilde{\Phi}(x + c_0 t)]$$

$$u = r' - s' = \frac{1}{2\rho_0 c_0} [\tilde{\Phi}(x - c_0 t) - \tilde{\Phi}(x + c_0 t)]$$



проверим удовлетворяет ли полученное решение при $t = 0$ начальным условиям:

$$p' = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x_0) + \tilde{\Phi}(x_0)] = \tilde{\Phi}(x_0), \quad u = \frac{1}{2\rho_0 c_0} [\tilde{\Phi}(x_0) - \tilde{\Phi}(x_0)] = 0.$$

Итак, $u = 0$ везде при $t = 0$, $p' = \tilde{\Phi}(x_0)$ на AB и $p' = 0$ вне AB .

При $t > 0$ начальное возмущение давления распадается на две равные части, каждая из которых имеет ширину AB , а высоту в два раза меньшую, чем начальное возмущение.

Каждая из волн $\frac{1}{2}\tilde{\Phi}(x - c_0 t)$ и $\frac{1}{2}\tilde{\Phi}(x + c_0 t)$ движется без искажения, прямая волна вправо,

обратная — влево со скоростями c_0 . При $t > 0$ начальное возмущение давления вызывает возмущение скорости u , которое представляет из себя совокупность двух волн каждая из которых имеет ширину AB , а высоту в $2\rho_0 c_0$ раз меньшую, чем начальное возмущение давления. Причем для прямой волны знак возмущения скорости совпадает со знаком возмущения давления, для обратной — противоположен.

В зоне 4 решение есть сумма прямой и обратной волн. Зоны 1, 3, 6 - области покоя, где $p' = 0, u = 0$, в зоне 2 (где $s' = 0$) - только прямая волна, в зоне 5 (где $r' = 0$) - только обратная волна.

Итак, в области 4 происходит взаимодействие прямой и обратной волн. Это область *не* особого решения.

Для величины возмущения скорости в прямой волне (зона 2) имеем $u = \frac{\tilde{\Phi}(x - c_0 t)}{2\rho_0 c_0}$,

для обратной волны (зона 5) имеем $u = -\frac{\tilde{\Phi}(x+c_0t)}{2\rho_0c_0}$.

4. Рассмотрим еще одно частное решение *не особого типа*. Пусть при $t = 0$ на отрезке AB независимо заданы обе начальные функции $\tilde{\Phi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$. Предположим теперь, что $\tilde{\Phi}(x) \equiv 0$. Тогда начальные условия в задаче Коши запишутся в виде:

$$p'(0,x) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x) \equiv 0 & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases} \quad u(0,x) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases},$$

где $p'(0,x), u(0,x) \in C^1(-\infty, \infty)$

Получим аналогичную рассмотренной в пункте 3 задачу. Только теперь величины p' и u поменялись местами. Решение задачи дается в виде

$$u = \frac{1}{2}[\tilde{\psi}(x-c_0t) + \tilde{\psi}(x+c_0t)],$$

$$p' = \frac{\rho_0c_0}{2}[\tilde{\psi}(x-c_0t) - \tilde{\psi}(x+c_0t)].$$

5. Общий случай.

Задача Коши, начальные данные при $t = 0$ задаются в виде

$$p'(0,x) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases} \quad u(0,x) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x) & \text{на } AB \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases},$$

где $p'(0,x), u(0,x) \in C^1(-\infty, \infty)$

Получим общее решение, формулы для которого мы уже выписывали выше. Опять будет в зонах 1, 3, 6 покой, в зонах 2 и 5 — особое решение, а в зоне 4 — решение общего вида. Т. е. качественно мы имеем те же самые результаты, что и в примерах 3 и 4.

Отметим важный результат. Скорость распространения возмущений равна скорости звука c_0 и зависит только от параметров начального состояния и показателя адиабаты

Пуассона γ ($c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$) и не зависит от вида функций $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\Phi}$ в начальных данных. Для

газа $c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma RT_0}$; для воздуха $c_0 = 20,1\sqrt{T}$ м/с (при $t = 0^\circ C$ $c_0 \approx 330$ м/с); для воды $c_0 \approx 1400$ м/с.

Это отличает акустические волны от, например, поверхностной волны в тяжелой несжимаемой жидкости. Там скорость волны для глубокой жидкости зависит от длины волны. Для воды $c = 1,25\sqrt{\lambda}$ м/с без учета влияния капиллярных сил.

Сравнительных анализ некоторых свойств квазилинейной и линейной систем уравнений одномерной газовой динамики.

Для существования исходной нелинейной системы уравнений движения (квазилинейной) требовалось, чтобы p , ρ и u (или \vec{v}) были бы непрерывными функциями вместе со своими первыми производными, т. е. принадлежали к классу C^1 . Для волновых уравнений требовалось, чтобы искомые функции были дважды

дифференцируемыми функциями. Наша система линеаризованных уравнений требует от искомых функций p' (или ρ') и u непрерывности и один раз дифференцируемости.

Для одномерного плоского одноэнтропического течения идеального газа (жидкости) линейная (линеаризованная) система уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

(имеется два семейства действительных характеристик, система двух уравнений для двух искомых функций гиперболического типа или два волновых уравнения $D_0^2 p' = 0, D_0^2 u = 0$

для одной функции каждое, где волновой оператор $D_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, или одно волновое

уравнение для потенциала скорости ϕ).

Исходная квазилинейная система уравнений (нелинейная относительно u, p)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ где } c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Для квазилинейной гиперболической системы уравнения движения были выведены в предположении, что p, ρ и u (или \vec{v}) были бы непрерывными функциями вместе со своими первыми производными класса C^1 .

Отметим некоторые свойства рассматриваемой линейной гиперболической системы. Для линеаризованной системы уравнений требуется, чтобы искомые функции были бы непрерывны и допускали бы один раз дифференцирование. Если начальные условия задачи Коши таковы, что содержат разрыв первых производных первого рода (т. е. конечный разрыв производных первого порядка), то такой разрыв называется *слабым*.

1. Слабый разрыв, как мы показали, распространяется только по характеристикам.

2. Пусть, напр., характеристика C_+ несет разрыв первых производных первого рода — слабый разрыв, а вне C_+ решение такое, что функции принадлежат классу C^1 . Тогда для уравнений движения можно обобщить решение, включив в него и характеристику C_+ .

Такое решение называется обобщенным решением уравнений движения.

3. Слабые разрывы не могут исчезнуть, если они были в начальных условиях и не могут возникнуть внутри характеристического треугольника, если их не было в начальных условиях.

4. Если терпят разрыв вторые и высшие производные, то эти разрывы распространяются только по характеристикам.

Замечание. Даже при отсутствии слабых разрывов на начальном отрезке AB для квазилинейных уравнений внутри характеристического треугольника может возникнуть разрыв первых производных.

В случае сильных разрывов (разрывов первого рода) мы получили следующие свойства для нашей линейной гиперболической системы:

1. Сильный разрыв распространяется только по характеристикам.

2. Пусть, например, сильный разрыв распространяется по характеристике C_+ . Тогда для линейной системы можно обобщить решение, включив в него и ударную волну C_+ . Причем для нашей системы соответствующий инвариант Римана не терпит разрыва. Такое решение называется обобщенным решением линейной гиперболической системы.

3. Сильный разрыв не может исчезнуть, если он был в начальных условиях и не может возникнуть, если его не было в начальных условиях линейной гиперболической системы, т. е. для линейной гиперболической системы справедливы для сильных разрывов те же положения, что и для слабых разрывов.

Отметим, что для исходной квазилинейной гиперболической системы эти положения не имеют места, а именно:

I. Сильный разрыв распространяется не по характеристикам. Эти линии сильного разрыва трудно обсчитывать (как численно, так и аналитически).

II. Сильный разрыв в начальных условиях может сразу исчезнуть и решение кроме начальной кривой будет всюду непрерывное.

III. Сильный разрыв может появиться в характеристическом треугольнике, когда на начальной кривой решение было всюду непрерывно.

Некоторые свойства одномерных плоских, сферических и цилиндрических волн.

Волновое уравнение для нахождения потенциала $\phi = \phi(t, x)$ в одномерном случае:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \ln S}{\partial x} \right), \quad (1.29.2)$$

Уравнение (1.29.2) для случаев плоских ($S = const$) и сферических волн ($S = x^2$) интегрируется в конечном виде, т.е. может быть найдено его общее решение.

Распространение сигнала от точечного источника для случая плоских волн.

Рассмотрим случай плоских ($S = const$) волн. Тогда волновое уравнение (1.29.2) примет

$$\text{вид: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

Введем новые независимые переменные, получившие название характеристических переменных, $\xi = x - c_0 t$, $\eta = x + c_0 t$.

Тогда волновое уравнение примет вид $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, интегрирование которого дает

$$\phi = f(\xi) + g(\eta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \quad (3.3)$$

Здесь f и g - произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов.

Произвольные функции f и g определяются по заданным начальным и/или граничным условиям.

Рассмотрим задачу о распространении сигнала из точки $x = 0$ в область $x > 0$ с

$$\text{граничным условием вида } \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = Q(t) \quad (3.4)$$

(выбор в граничном условии функции $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ вместо ϕ связан с удобством сравнения решений в задачах об источнике в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях).

$$\text{Решение имеет вид } \phi(t, x) = -c_0 \cdot \int_0^{t-x/c_0} Q(z) dz \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5) видно, что возмущение ограничено во времени интервалом

$$x/c_0 < t < x/c_0 + T$$

Т. е., если принять, что источник в точке $x = 0$ издавал сигнал в течение времени T , то первый сигнал к наблюдателю прибывает с волновым фронтом, покинувшим источник при $t = 0$, а прекращается возмущение вместе с сигналом, покинувшим источник в последний момент времени $t = T$.

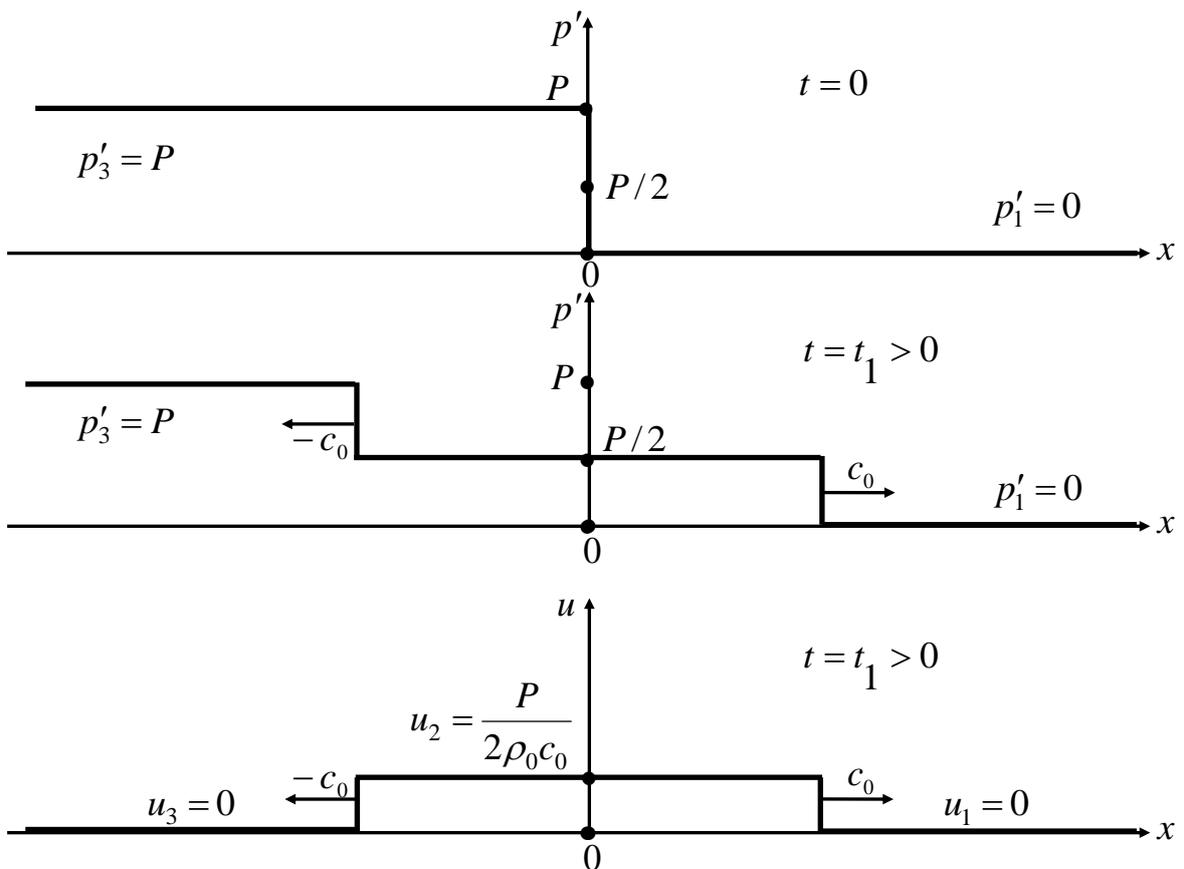
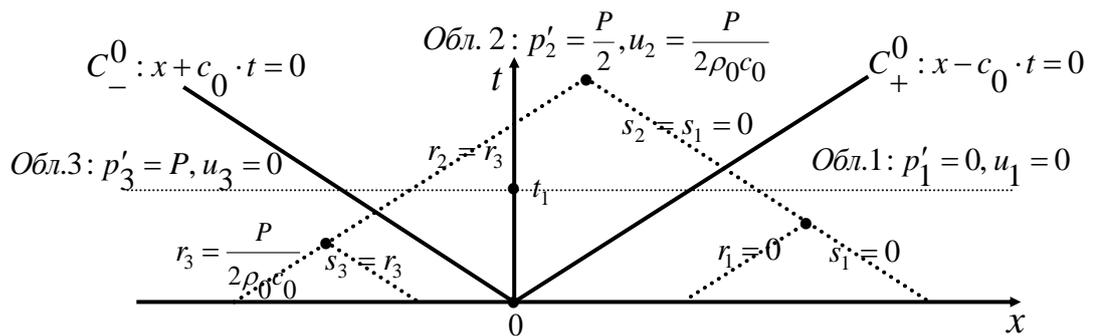
Два примера задач о распаде произвольного разрыва для случая плоских волн.

Рассмотрим два примера задач, содержащих сильный разрыв в начальных данных, для случая плоских волн ($S(t, x) = const$).

Первая задача. Зададим начальные условия для задачи Коши в виде:

$$p'(0, x) = \begin{cases} P & \text{при } x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}, \text{ где } P = const > 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Данные начальные условия моделируют покоящийся газ, разделенный на две части перегородкой (разрывом в начальных данных), в левой части задано возмущение давления P . При $t = 0$ перегородка убирается. Задача найти решение при $t > 0$.



Для построения решения заметим, что вдоль C_+ : $\frac{dx}{dt} = c_0$ выполнено $r = \text{const}$,

вдоль C_- : $\frac{dx}{dt} = -c_0$ выполнено $s = \text{const}$,

где $2r = \frac{p'}{\rho_0 c_0} + u$, $2s = \frac{p'}{\rho_0 c_0} - u$ и, след., $p' = \rho_0 c_0 (r + s)$, $u = r - s$.

Тогда в области 1: $r_1 = 0, s_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0, p'_1 = 0$,

в области 3: $2r_3 = \frac{p'_3}{\rho_0 c_0} + u_3 = \frac{P}{\rho_0 c_0} + 0 \Rightarrow r_3 = \frac{P}{2\rho_0 c_0}$, $2s_3 = \frac{p'_3}{\rho_0 c_0} - u_3 = \frac{P}{\rho_0 c_0} - 0$

$\Rightarrow s_3 = \frac{P}{2\rho_0 c_0}$, тогда $u_3 = r_3 - s_3 = 0$, $p'_3 = \rho_0 c_0 (r_1 + s_1) = P$. Как видно из решения

области 3 и 1 ничего не знают о том, что в начале координат при $t = +0$ имел место разрыв начальных данных.

Рассмотрим область 2. Так как для C_- : $s_2 = s_1 = 0$, а для C_+ : $r_2 = r_3 = \frac{P}{2\rho_0 c_0}$, то

$p'_2 = \rho_0 c_0 (r_2 + s_2) = \rho_0 c_0 (r_3 + s_1) = \frac{P}{2}$, $u_2 = r_2 - s_2 = r_3 - s_1 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} > 0$.

Интересный факт: чисто формально получается, что при очень большом $P \rightarrow \infty$ следует $p'_2 = \frac{P}{2} \rightarrow \infty$, т. е. предположение о линейности есть сильное и неправильное при $p' \rightarrow \infty$? В нелинейной постановке: для газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ имеем, что при $\frac{p_3}{p_1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \rightarrow 44$. Для жидкости предположение о линейности хорошо работает при p' до 500 атм. и удовлетворительно до 1000 атм.

Итак, в линейной постановке вправо по газу с нулевым возмущением давления побежит ударная волна сжатия C_+^0 с амплитудой давления $+P/2$, влево по газу с положительным возмущением давления P побежит ударная волна разрежения C_-^0 с амплитудой $-P/2$.

Вторая задача. Зададим начальные условия для задачи Коши в виде:

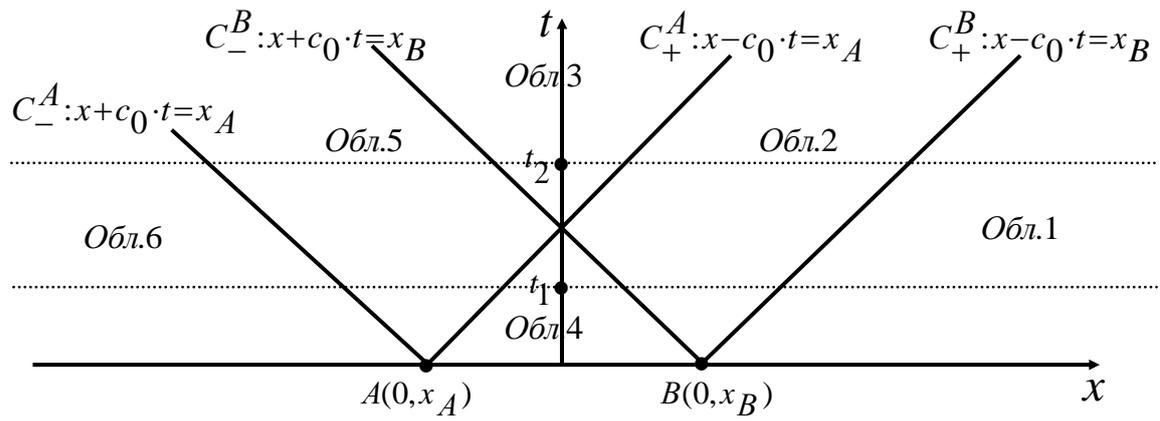
$$p'(x, 0) = \begin{cases} P & \text{на } AB : x_A \leq x \leq x_B \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{на } AB : x_A \leq x \leq x_B \\ 0 & \text{вне } AB \end{cases}.$$

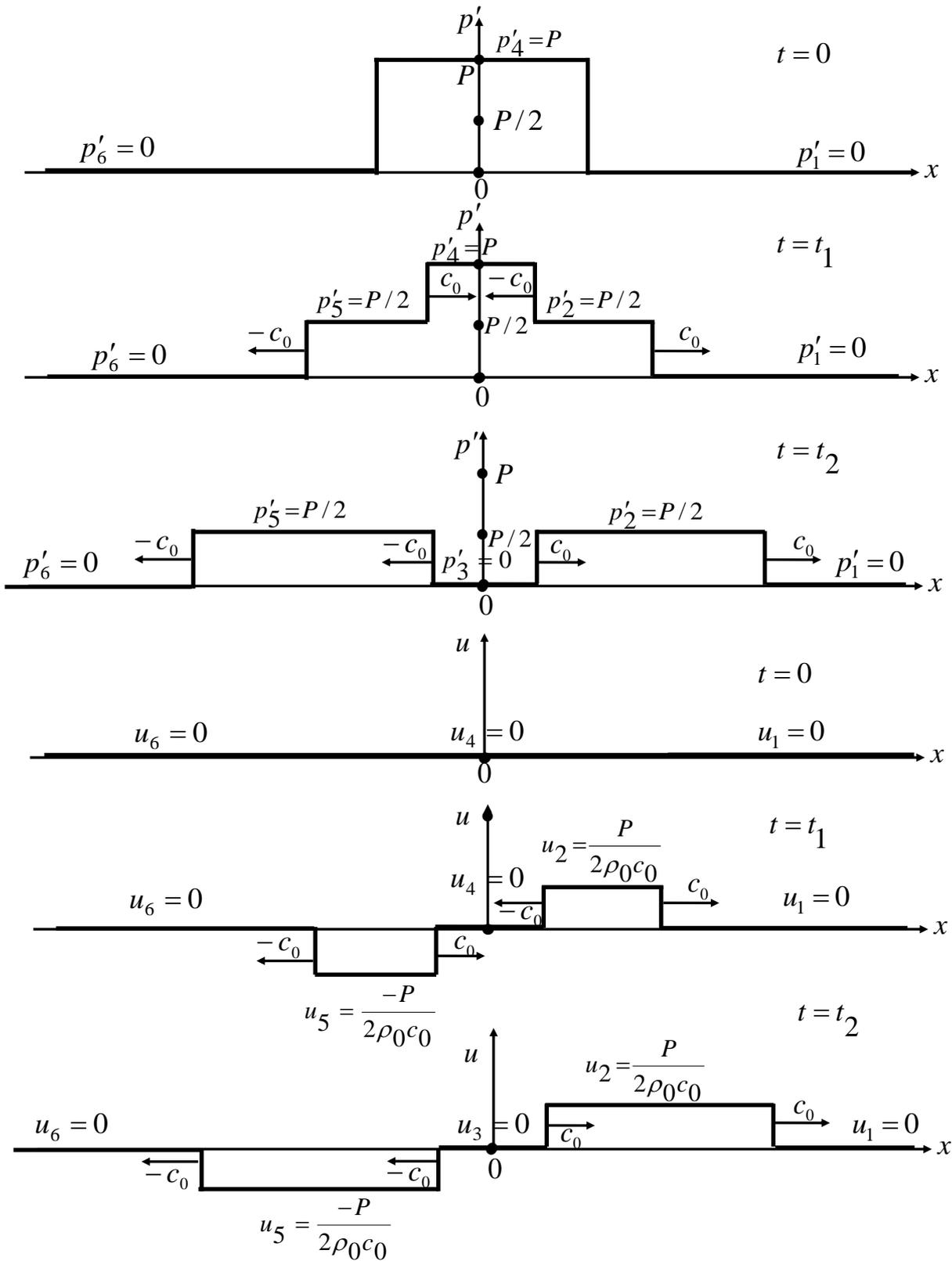
Данные начальные условия моделируют покоящийся газ, разделенный на три части двумя перегородками (разрывы в начальных данных в точках A и B), в центральной части (отрезок AB) задано возмущение давления $P = \text{const} > 0$. При $t = 0$ перегородки убираются. Задача найти решение при $t > 0$.

Для построения решения заметим, что вдоль C_+ : $\frac{dx}{dt} = c_0$ выполнено $r = \text{const}$,

вдоль C_- : $\frac{dx}{dt} = -c_0$ выполнено $s = \text{const}$,

где $2r = \frac{p'}{\rho_0 c_0} + u$, $2s = \frac{p'}{\rho_0 c_0} - u$ и, след., $p' = \rho_0 c_0 (r + s)$, $u = r - s$.





Тогда в областях 1, 2, 3 будет выполнено: $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, $r_1 = r_3 = 0$;

в областях 6, 5, 3 будет выполнено: $s_6 = s_3 = 0$, $r_6 = r_5 = r_3 = 0$;

Поэтому в областях 1,3,6: $u_1 = 0$, $p'_1 = 0$; $u_3 = 0$, $p'_3 = 0$; $u_6 = 0$, $p'_6 = 0$;

$$\text{В обл. 4: } r_4 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} + 0, s_4 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} + 0 \Rightarrow p_4 = \rho_0 c_0 \left(\frac{P}{2\rho_0 c_0} + \frac{P}{2\rho_0 c_0} \right) = P \text{ и}$$

$$u_4 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} - \frac{P}{2\rho_0 c_0} = 0;$$

$$\text{В обл. 2: } r_2 = r_4 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} + 0, s_2 = s_1 = 0 \Rightarrow p'_2 = \rho_0 c_0 (r_2 + s_2) = \frac{P}{2} \text{ и}$$

$$u_2 = r_2 - s_2 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} > 0;$$

$$\text{В обл. 5: } r_5 = r_6 = 0, s_5 = s_4 = \frac{P}{2\rho_0 c_0} + 0 \Rightarrow p'_5 = \rho_0 c_0 \left(0 + \frac{P}{2\rho_0 c_0} \right) = \frac{P}{2} \text{ и}$$

$$u_5 = r_5 - s_5 = -\frac{P}{2\rho_0 c_0} < 0.$$

Итак, также, как и в случае гладких решений класса C^1 , начальное давление сразу же распадается на две равные половинки $\frac{P}{2}$. Одна половина движется вправо со скоростью c_0 , другая — влево со скоростью $-c_0$. Однако, как и в первой задаче, каждая точка

разрыва порождает пару волн. В ударных волнах сжатия C_+^B и C_-^A давление в газе повышается на $\frac{P}{2}$ и газ вовлекается в движение вслед за волной со скоростью

$$u = \frac{P}{2\rho_0 c_0} > 0 \text{ для прямой волны и } u = -\frac{P}{2\rho_0 c_0} < 0 \text{ для обратной волны. Через время}$$

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{c_0} \frac{1}{2} \text{ после прохождения ударных волнах сжатия } C_+^B \text{ и } C_-^A \text{ частицы газа}$$

испытывают воздействие ударных волнах разрежения C_+^A и C_-^B , после которых давление в газе скачком понижается на $\frac{P}{2}$ до нуля и скорость газа становится равной нулю, т. е. газ возвращается (обл. 3) в исходное невозмущенное состояние (обл. 1,6).

Рассмотренные в качестве примеров задачи имеют большое прикладное и теоретическое значения. Заметим, что если ось $x = 0$ заменить абсолютно твердой стенкой, т. е. задать на ней условие $u = 0$, то можно получить новое семейство задач.

Задача об отражении акустической ударной волны от абсолютно твердой (жесткой) стенки для случая плоских волн.

Рассмотрим задачу отражения акустической ударной волны от жесткой стенки для случая плоских волн ($S(t, x) = const$). Пусть по трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами $\rho_0, p_0, u_0 = 0$ и закрытой справа (в сечении $x = 0$) жесткой стенкой, распространяется слева направо с постоянной скоростью c_0 ударная волна (У. В.) заданной интенсивности (т. е. заданы значения ρ_1, p_1, u_1 за У. В.). В момент времени $t = 0$ У. В. достигает жесткой стенки. Требуется рассчитать движение и параметры газа при $t > 0$. Эта задача с граничным условием, т. к. наличие жесткой стенки означает, что на ней должно быть выполнено граничное условие непротекания $u(t, 0) = 0, t \geq 0$. На нижеследующих рисунках 3.11, 3.12 представлена картина отражения У. В. в физической и фазовой плоскостях.

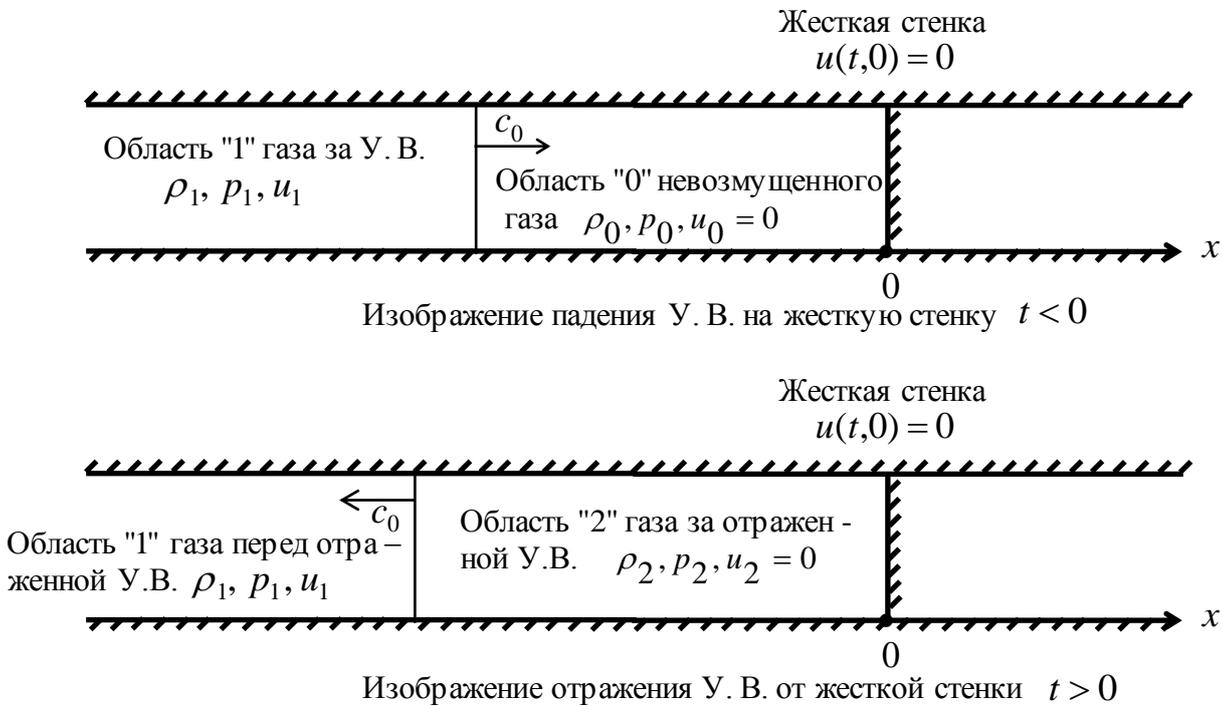


Рис. 3.11 Картина отражения У. В. от жесткой стенки в физической плоскости

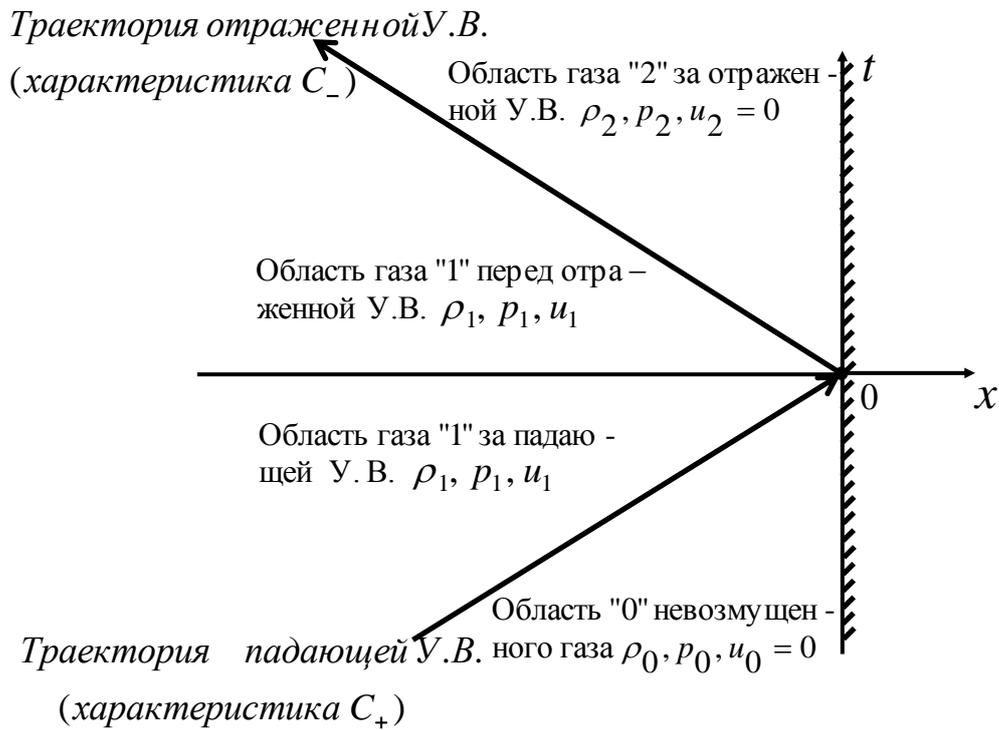


Рис. 3.12 Картина отражения У. В. от жесткой стенки в фазовой плоскости

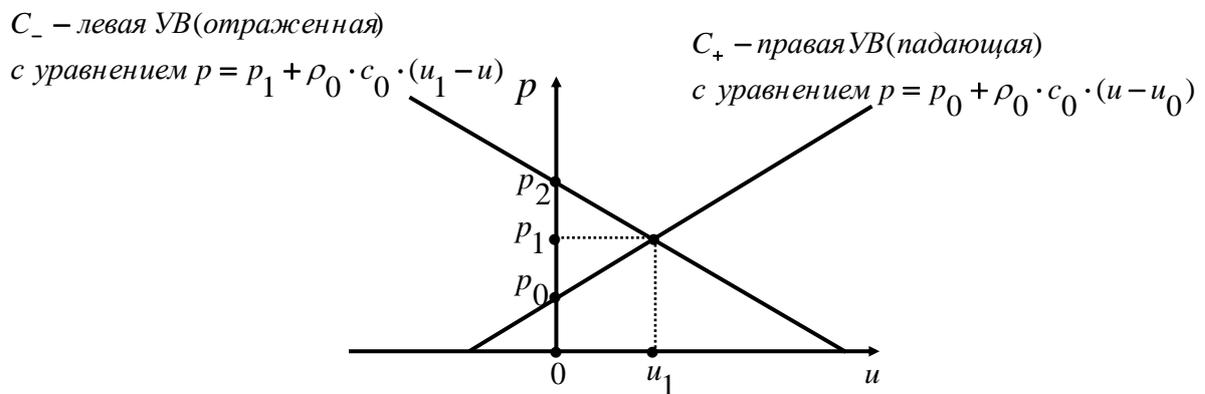


Рис. 3.13. (u, p) - диаграмм падения-отражения У. В. от жесткой стенки

Представленная на Рис. 3.11, 3.12 графическая интерпретация отражения У.В. от жесткой стенки стала возможной благодаря анализу возможных состояний нашей системы на плоскости (u, p) - диаграмм (Рис. 3.13).

Как было показано ранее, прямая $p = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u$, проходящая через точку с координатами $(0, p_0)$ в плоскости (u, p) , отображает множество возможных состояний газа за правой У. В. Аналогом этой прямой, выражающей условие постоянства левого инварианта Римана s вдоль характеристики C_- когда та пересекает правую У. В. (характеристика C_+), в плоскости переменных (u, p) служит C_+ характеристика в фазовой плоскости переменных (t, x) . В нашем случае состояние за падающей У. В. известно по

условиям задачи – это точка (u_1, p_1) на диаграмме. Множество возможных состояний после отражения У. В. от жесткой стенки лежит на прямой $p = p_1 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot (u_1 - u)$, проходящей через точку с координатами (u_1, p_1) и выражающей условие постоянства правого инварианта Римана r вдоль характеристики C_+ , когда та пересекает траекторию левой У. В. (характеристика C_-). Значение величины давления p_2 определяется как точка пересечения прямой $p = p_1 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot (u_1 - u)$ с осью p , т. к. мы должны удовлетворить граничному условию непротекания на жесткой стенке $u_2 = 0$. Вычислим искомые значения параметров задачи.

Для падающей ударной волны, распространяющейся вправо ($C_+ : \frac{dx}{dt} = c_0$):

$$\frac{p_1}{\rho_0 \cdot c_0} - u_1 = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot c_0} - u_0 \Rightarrow p_1 = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1, \text{ т.к. } u_0 = 0$$

Для отраженной ударной волны, распространяющейся влево ($C_- : \frac{dx}{dt} = -c_0$):

$$\frac{p_2}{\rho_0 \cdot c_0} + u_2 = \frac{p_1}{\rho_0 \cdot c_0} + u_1 \Rightarrow p_2 = p_1 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1, \text{ т.к. } u_2 = 0$$

Таким образом, по известной из условий задачи величине скорости u_1 (или давления p_1) за падающей У. В. могут быть найдены все остальные параметры задачи отражения У. В. от стенки.

Одной из важных особенностей отражения У. В. от жесткой стенки является усиление действия падающей У. В. после отражения, характеризуемое коэффициентом усиления

$$k = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0}. \text{ Как видно из формулы, коэффициент усиления характеризует отношение}$$

избыточного давления $p_2 - p_0$ после отражения У. В. к избыточному давлению $p_1 - p_0$ в падающей У. В. Для рассматриваемого нами акустического случая отражения У. В. от жесткой стенки $k = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{p_1 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1}{\rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1} = 2$, т. е. коэффициент

усиления для слабых акустических волн постоянен и равен 2 и не зависит от интенсивности падающей волны. Т. е. при отражении даже слабой акустической волны избыточное давление удваивается. Отметим, что в общей нелинейной постановке для

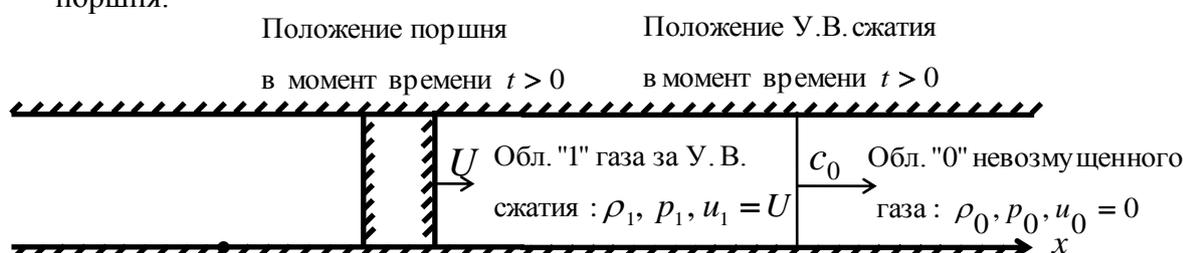
нашей задачи максимальный коэффициент усиления для отраженной волны $k_\infty = 2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$

при условии, что интенсивность падающей У. В. $\frac{p_1 - p_0}{p_0} \rightarrow \infty$. Для воздуха (показатель

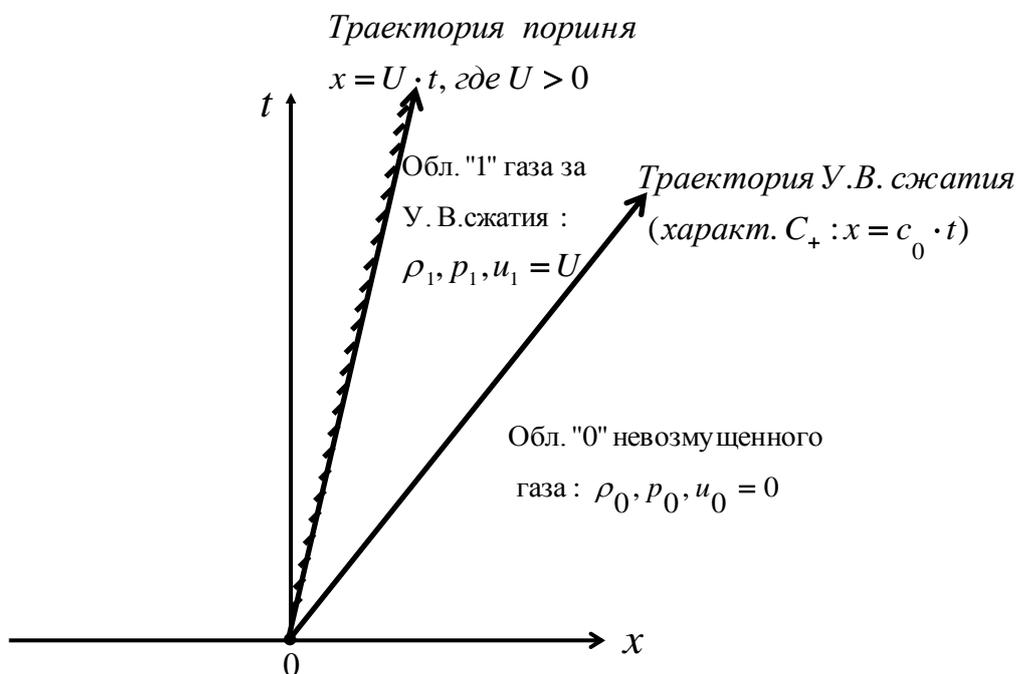
адиабаты Пуассона $\gamma = 1,4$) максимальное возрастание избыточного давления после отражения по отношению к избыточному давлению в падающей волне равно 8.

Задача о поршне в акустической постановке для случая плоских волн.

Рассмотрим задачу о поршне, вдвигаемом в трубу или выдвигаемом из трубы постоянного поперечного сечения ($S(t, x) = const$), заполненной газом. Решение будем строить в рамках рассматриваемого линейного приближения (акустической постановки). Итак, пусть в трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами $\rho_0, p_0, u_0 = 0$, в момент времени $t = 0$ из положения $x = 0$ начинает двигаться поршень с постоянной скоростью U . Требуется рассчитать движение и параметры газа при $t > 0$. Эта задача с граничным условием, т. к. наличие движущегося поршня означает, что на нем должно быть выполнено граничное условие непротекания, т. е. скорость частиц газа, прилегающих к поршню, должна равняться скорости поршня $u(t, Ut) = U, t > 0$. На нижеследующих рисунках 3.14, 3.15 представлена картина течения в физической и фазовой плоскостях для случая вдвигаемого (Рис. 3.14) и выдвигаемого (Рис. 3.15) поршня.



Физическая плоскость : случай поршня, вдвигаемого в газ ($U > 0$).



Фазовая плоскость : случай поршня, вдвигаемого в газ ($U > 0$).

Рис. 3.14 Картина течения в физической и фазовой плоскостях для случая вдвигаемого поршня

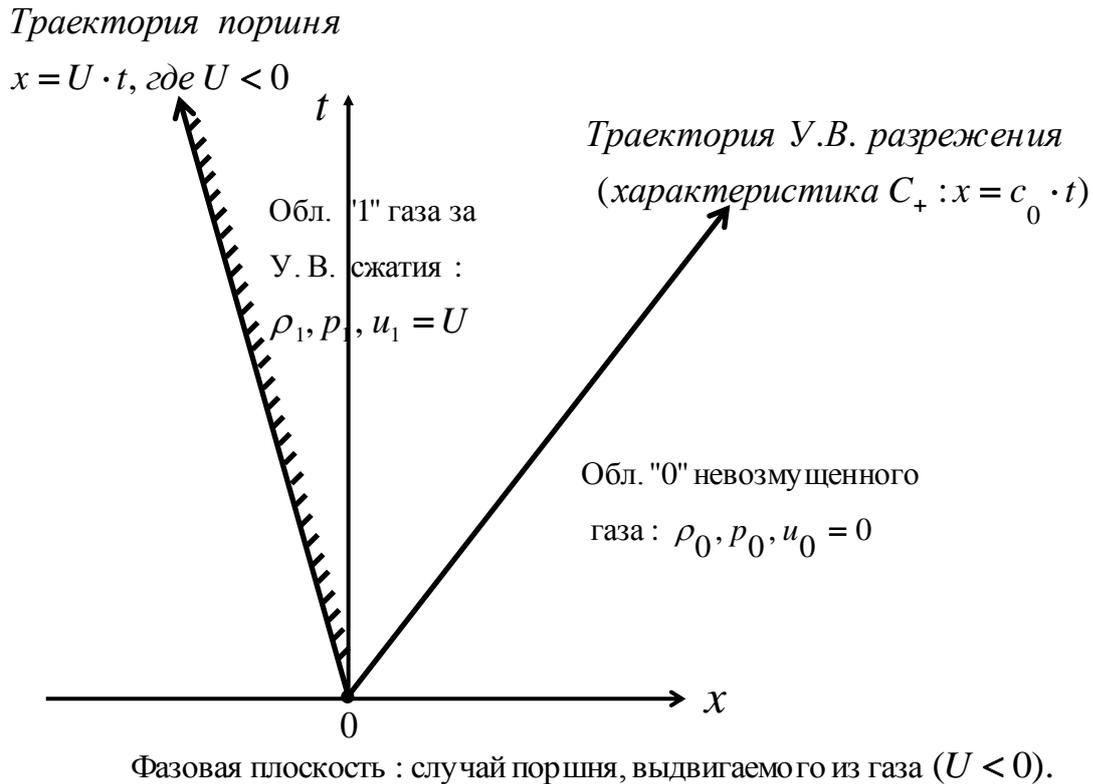
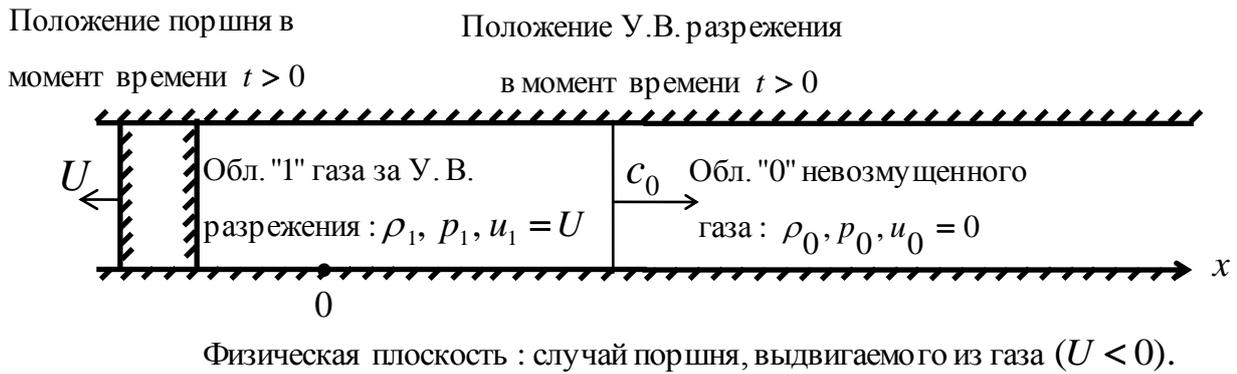


Рис. 3.15 Картина течения в физической и фазовой плоскостях для случая выдвигаемого поршня

Представленная на Рис. 3.14, 3.15 графическая интерпретация течений в физической и фазовой плоскостях стала возможной благодаря анализу возможных состояний нашей системы на плоскости (u, p) - диаграмм (Рис. 3.16).

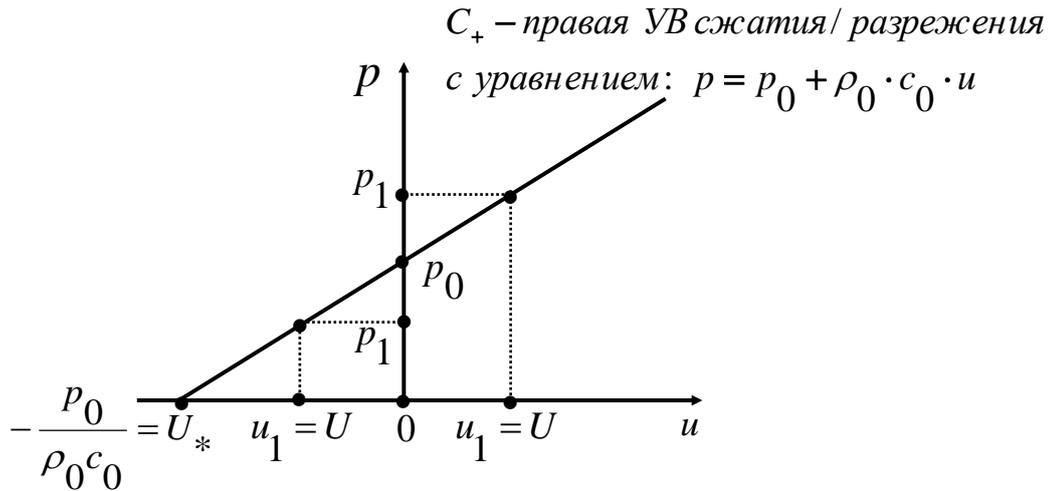


Рис. 3.16. (u, p) - диаграмма в задаче о поршне

Как было показано ранее, аналогом C_+ характеристики в фазовой плоскости с уравнением $\frac{dx}{dt} = c_0$ в рассматриваемой нами плоскости переменных (u, p) является прямая $p = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot (u - u_0)$, проходящая через точку с координатами $(u_0 = 0, p_0)$. Эта прямая – суть условие постоянства левого инварианта Римана s при пересечении характеристики C_+ по направлению вдоль характеристики C_- - отображает множество возможных состояний газа за правой У. В. В нашей задаче среда по которой могут распространяться возмущения (волны), инициируемые движущимся поршнем, расположена справа от поршня. Поэтому множество возможных состояний “1”, в которые может перейти газ из состояния “0”, будет располагаться на прямой постоянных значений левого инварианта Римана s :

$$\frac{p_1}{\rho_0 \cdot c_0} - u_1 = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot c_0} - u_0 \Rightarrow p_1 = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1, \text{ т.к. } u_0 = 0$$

Значение скорости $u_1 = U$ в виду наличия левого граничного условия в задаче – условия непротекания на поверхности поршня – позволяет найти величину давления за волной $p_1 = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot U$. По найденному значению давления найдем величину плотности

$$\rho_1 = \frac{p_1}{c_0^2} \text{ из уравнения состояния. Значение } p_1 = p_0 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot U \text{ в случае вдвигающегося}$$

поршня $U > 0$ будет больше начального p_0 , т. е. вправо побегит У. В. сжатия, в случае выдвигающегося поршня $U < 0$ величина p_1 будет меньше p_0 , т.е. вправо побегит У. В.

разрежения. Заметим также, что при величине U равной $U_* = -\frac{p_0}{\rho_0 \cdot c_0}$ значение $p_1 = 0$ и

при дальнейшем увеличении абсолютной величины скорости U при выдвигении поршня газ “оторвется от поршня”, т. е. вблизи поршня образуется область вакуума.

Распространение сигнала от точечного источника для случая сферических волн.

Рассмотрим теперь сферический ($S = R^2$) случай, т. е. случай волн симметричных относительно начала координат, здесь $R = x$ - расстояние от центра (начала координат). В этом случае волновое уравнение (1.29.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{\partial \phi}{\partial R} \cdot \frac{2}{R} \right), \quad (3.20)$$

Это уравнение можно преобразовать к уже исследованному виду (3.1) относительно новой искомой функции $\phi \cdot R$:

$$\frac{\partial^2 (\phi \cdot R)}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 (\phi \cdot R)}{\partial R^2}, \quad (3.21)$$

общее решение которого нам уже известно:

$$\phi(t, R) = \frac{f(R - c_0 t)}{R} + \frac{g(R + c_0 t)}{R} \quad (3.22)$$

Рассмотрим случай источника, генерирующего только уходящие волны, тогда решение принимает вид $\phi(t, R) = \frac{f(R - c_0 t)}{R}$, где функция f определяется свойствами источника.

Обычно их удобно задавать в виде

$$Q(t) = \lim_{R \rightarrow 0} \left(4\pi R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \quad (3.23)$$

Из (3.23) в предположении ограниченности $\lim_{R \rightarrow 0} (f') \Rightarrow Q(t) = -4\pi f(-c_0 t)$, поэтому

$$\text{потенциал } \phi(t, R) = -\frac{1}{4\pi R} \cdot Q\left(t - \frac{R}{c_0}\right) \quad (3.24)$$

Физический смысл: $Q(t)$ - объемный расход жидкости, $\frac{\partial \phi}{\partial R}$ - радиальная скорость.

Из формулы (3.24), как и в плоском случае (3.5) видно, что возмущение ограничено во времени интервалом

$$R/c_0 < t < R/c_0 + T$$

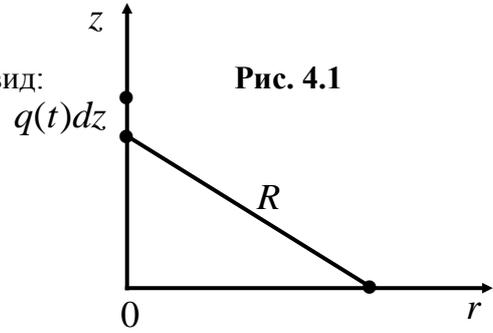
Т. е., если принять, что источник издавал сигнал в течение промежутка времени T , то первый сигнал к наблюдателю прибывает с волновым фронтом, покинувшим источник при $t = 0$, а прекращается возмущение вместе с сигналом, покинувшим источник в последний момент времени $t = T$.

Распространение сигнала от источника для случая цилиндрических волн.

Рассмотрим теперь цилиндрический ($S = x$) случай, т. е. случай волн симметричных относительно оси координат Oz , здесь $r = x$ - расстояние от оси симметрии Oz (Рис 4.1).

В этом случае волновое уравнение (1.29.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \right), \quad (4.1)$$



Построение решения уравнения (4.1) будет основываться на обобщении найденного выше (формула (3.24)) решения для сферически-симметричного случая для источника, генерирующего только уходящие волны. Для этого положим, что источники распределены равномерно вдоль оси Oz с плотностью $q(t)$ на единицу длины (Рис. 4.1). В этом случае полное возмущение, создаваемое таким распределением, является функцией только от расстояния r до оси Oz и от времени t . Таким образом, мы получаем цилиндрическую волну, генерируемую линейным источником. Полное возмущение, следуя (3.24), тогда будет равно

$$\phi(t, r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(t - R/c_0)}{R} \cdot dz = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t - R/c_0)}{R} \cdot dz, \text{ где } R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (4.2)$$

Полученное решение (4.2) может быть записано в различных формах. Так, подставив в интеграл $z = r \operatorname{sh} \zeta$, $R = r \operatorname{ch} \zeta$, получим

$$\phi(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q \left(t - \frac{r}{c_0} \operatorname{ch} \zeta \right) \cdot d\zeta \quad (4.3)$$

Применив другую подстановку $\eta = t - \frac{R}{c_0}$, $z = c_0 \sqrt{(t - \eta)^2 - r^2 / c_0^2}$, получим

$$\phi(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t - r/c_0} \frac{q(\eta)}{\sqrt{(t - \eta)^2 - r^2 / c_0^2}} \cdot d\eta \quad (4.4)$$

Формула (4.3) удобнее для вычисления производных от ϕ и, следовательно, для непосредственной проверки справедливости волнового уравнения для полученного решения в форме (4.3). Действительно, после вычисления соответствующих производных и подстановки в (4.1) получим, что

$$\begin{aligned} c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{c_0}{r} \operatorname{sh} \zeta q' \left(t - \frac{r}{c_0} \operatorname{ch} \zeta \right) \right\} \cdot dz = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c_0}{2\pi r} \operatorname{sh} \zeta q' \left(t - \frac{r}{c_0} \operatorname{ch} \zeta \right) \right\} \end{aligned}$$

Последний предел равен нулю, если, например, $\lim_{t \rightarrow -\infty} q'(t) = 0$, или, например, если $q(t < 0) \equiv 0$, что завершает проверку.

Из формулы (4.4) в отличие от плоского случая (3.5) или сферического (3.24) не следует, что возмущение от источника, издававшего сигнал в течение промежутка времени T , ограничено во времени интервалом

$$r/c_0 < t < r/c_0 + T$$

Т. е., если принять, что источник издавал сигнал в течение промежутка времени T , то в цилиндрическом случае первый сигнал к наблюдателю прибывает с волновым фронтом, покинувшим источник при $t = 0$, но действие возмущения продолжается и после момента времени $t = r/c_0 + T$. Действительно, из представления решения (4.4) имеем:

$$\phi(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{q(\eta)}{\sqrt{(t-\eta)^2 - r^2/c_0^2}} \cdot d\eta, \text{ где } t > r/c_0 + T.$$

Тогда для фиксированного r получим оценку

$$\phi(t, r = \text{const}) \sim -\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^T q(\eta) \cdot d\eta \right\} \cdot \frac{1}{t} \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ т.е. возмущение будет стремиться к нулю}$$

только асимптотически при $t \rightarrow \infty$.

Это важное различие между нечетным и четным числом измерений было замечено Адамаром. Можно сказать, что иметь дело с нечетным числом измерений проще, чем с четным, поэтому цилиндрическое волновое решение было выведено из сферического волнового решения. Другим способом получить указанное решение можно было методом спуска из общего решения Пуассона для трехмерного случая.

Задача о распаде разрыва в акустической постановке для сферического случая.

Рассмотрим шар радиуса R_0 . Пусть давление в газе внутри шара равно $p_0 + P$, снаружи шара давление равно p_0 . Газ первоначально всюду покоится. В момент времени $t = +0$ оболочка шара разрушается. Тогда согласно определениям скорости и давления через потенциал ϕ начальные условия в нашей задаче для волнового уравнения примут вид:

$$t = 0: \phi = 0, 0 < R < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{P}{\rho_0}, & R < R_0, \\ 0, & R > R_0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

т. е. решение $\phi = \frac{f(R - c_0 t)}{R} + \frac{g(R + c_0 t)}{R}$ при $t = 0$ должно удовлетворять условиям:

$$f(R) + g(R) = 0, \quad 0 < R < \infty, \\ f'(R) - g'(R) = \begin{cases} \frac{P}{\rho_0 c_0} \cdot R, & 0 < R < R_0, \\ 0, & R_0 < R < \infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

Условия (3.26) определяют функции f, g для положительных значений их аргументов. Однако в решение $\phi(t, R)$ - (3.22) входят значения функции f и для отрицательных значений аргумента. Недостающее условие связано с поведением решения в начале координат и связано с требованием отсутствия источника в начале координат, т.е.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(4\pi R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = 0,$$

$$\text{следовательно } f(-c_0 t) + g(c_0 t) = 0, \quad 0 < t < \infty \quad (3.27)$$

Как видно, условие (3.27) определяет функцию f для отрицательных значений аргумента по известным значениям функции g для положительных значений аргумента. Решая совместно уравнения (3.26) и (3.27), находим выражения для функций f, g :

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{\rho_0 c_0} \cdot (\xi^2 - R_0^2), & -R_0 < \xi < R_0, \\ 0, & R_0 < |\xi|. \end{cases}$$

$$g(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \cdot \frac{P}{\rho_0 c_0} \cdot (\xi^2 - R_0^2), & 0 < \xi < R_0, \\ 0, & R_0 < \xi. \end{cases}$$

Поэтому, формула для возмущения давления принимает вид:

$$p - p_0 = \frac{P}{2R} \{ (R - c_0 t) \cdot F + (R + c_0 t) \cdot G \}, \text{ где функции } F, G \text{ равны}$$

$$F = \begin{cases} 1, & \text{если } -R_0 < R - c_0 t < R_0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < R + c_0 t < R_0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Картина характеристик и изменение давления со временем изображены на Рис. 3.1. Как видно, для точек $R > R_0$ давление скачком возрастает на величину $\frac{R_0}{2R} \cdot P$ в момент времени $t = (R - R_0) / c_0$, затем избыточное давление линейно убывает со временем, достигая величины $-\frac{R_0}{2R} \cdot P$ в момент времени $t = (R + R_0) / c_0$, а потом скачком возвращается к нулю. Даже при $R = R_0$ скачок на фронте волны равен только $P/2$, остальная часть $P/2$ от полного скачка P поглощается идущей к центру волной разрежения.

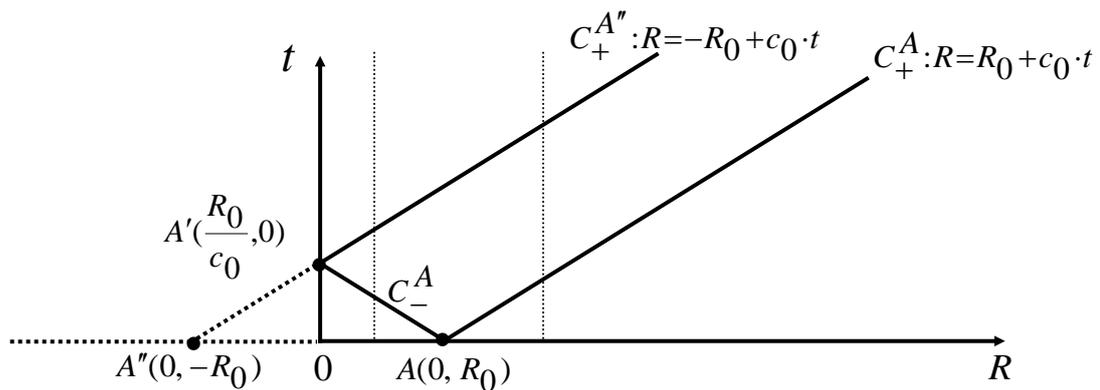
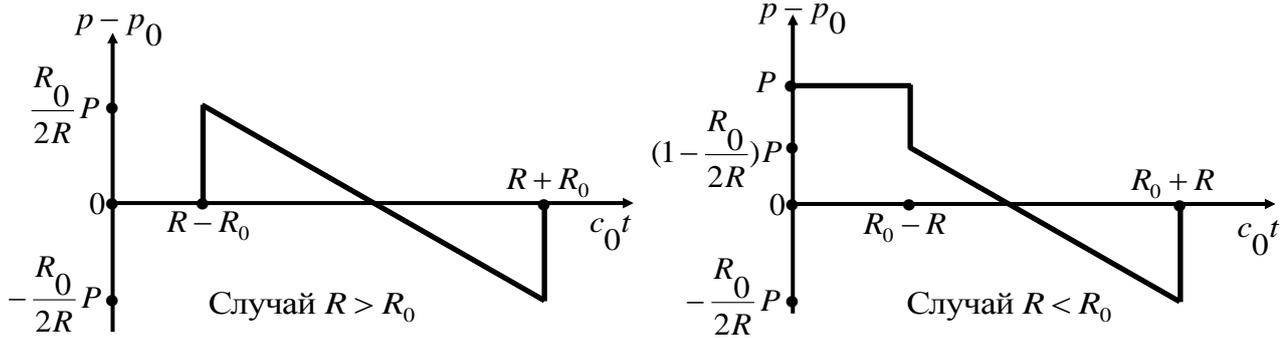


Рис. 3.1



Для внутренних точек $R < R_0$ скачкообразное изменение давления, уменьшающее исходное значение P до $(1 - \frac{R_0}{2R}) \cdot P$, происходит в момент времени $t = (R_0 - R) / c_0$, затем избыточное давление линейно убывает со временем, достигая величины $-\frac{R_0}{2R} \cdot P$ в момент времени $t = (R + R_0) / c_0$, а потом скачком возвращается к нулю.

Итак, при распаде разрыва на сфере радиуса R_0 одновременно возникают две ударные волны. Ударная волна сжатия C_+^A распространяется от центра по газу с давлением p_0 с постоянной скоростью c_0 , ее интенсивность падает по мере удаления от поверхности радиуса R_0 по закону $\frac{R_0}{2R} \cdot P$ по достижении поверхности радиуса R . Ударная волна разрежения C_-^A распространяется к центру по газу с давлением $p_0 + P$ с постоянной скоростью $-c_0$, ее интенсивность увеличивается по мере схождения к центру по закону $(1 - \frac{R_0}{2R}) \cdot P$ по достижении поверхности радиуса R . Далее ударная волна разрежения схлопывается в центре $R = 0$ и отражается от центра в виде ударной волны сжатия $C_+^{A'}$. Заметим, что в центре $R = 0$ изменения бесконечно велики, но весь процесс занимает бесконечно малый интервал времени. Возникшая ударная волна сжатия $C_+^{A'}$ движется от центра с постоянной скоростью c_0 и переменной интенсивностью $\frac{R_0}{2R} P$ поднимая величину давления в расширяющемся газе до величины p_0 .

Распространение возмущений от движущегося точечного источника.

Рассмотрим распространение малых возмущений в первоначально одномерном потоке, когда скорость потока $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const} \neq 0$ (и по величине, и по направлению). Газ считается невязким нетеплопроводным термически и калорически совершенным, течение – адиабатическим.

Тогда нелинеаризованная система уравнений движения имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p,$$

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Но т. к. $\text{div} \vec{v} = 0$, то $\rho = \rho_0 = \text{const}$, а т. к. $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, то $p = p_0 = \text{const}$, т. е. постоянны во всем потоке.

Тогда теорию малых возмущений в газе (сжимаемой жидкости) построенной нами раньше для случая покоящегося газа $\vec{v}_0 = 0$ можно распространить на случай газа, который первоначально движется с постоянной скоростью \vec{v}_0 . Во-первых, постоянные значения вектора скорости \vec{v} , давления p и плотности ρ удовлетворяют уравнениям движения и состояния:

$$\rho \cdot \text{div} \vec{v} = -\frac{d\rho}{dt}, \quad \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} p, \quad \frac{ds}{dt} = 0,$$

$$p = A(s) \rho^\gamma.$$

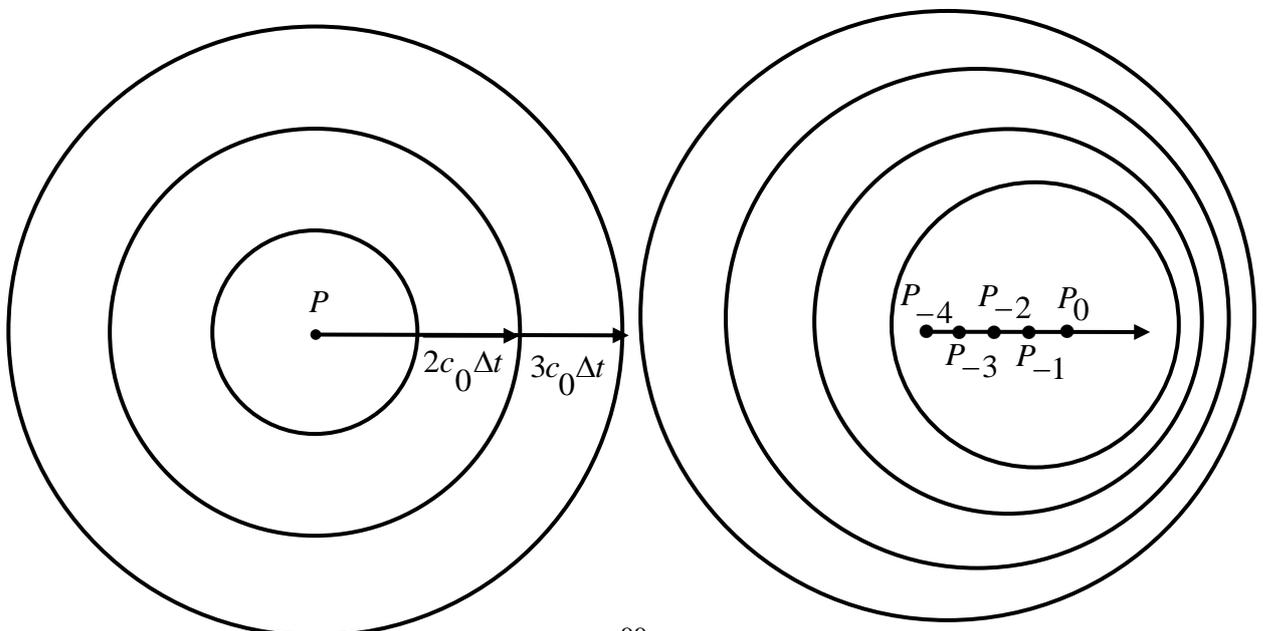
Величины ρ , p и s постоянны вдоль траектории и в силу однородности газа для всех точек одни и те же.

Введем новые координаты $\tilde{x} = x - v_0 t$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = z$, тогда $\tilde{v}_x = \frac{d\tilde{x}}{dt} = v_x - v_0$, $\tilde{v}_y = v_y$, $\tilde{v}_z = v_z$, т. е. введем систему координат, которая движется вместе с потоком со скоростью \vec{v}_0 .

Как известно, и как мы видим, уравнения движения для сжимаемого газа не меняют своего вида при переходе от одной к другой инерциальной системе координат, т. е. системе координат движущейся с постоянной скоростью относительно исходной инерциальной. (Например, из $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \Rightarrow \frac{d\tilde{\vec{v}}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$.) Поэтому в подвижной системе координат невозмущенный газ покоится ($\tilde{\vec{v}} = 0$) и применима наша теория.

Однако, в этом случае источник возмущения движется с постоянной скоростью $-\vec{v}_0$, если в основной системе координат он покоился.

Боле того, существует примеры прямых(натурных) задач, когда среда покоится, а источник движется. Например, самолет, который летит с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{сам}} = \text{const}$.



Рассмотрим для простоты точечный источник, когда его радиус в виде радиуса шара (цилиндра или пространства между двумя плоскостями) $R_0 \rightarrow 0$, и справедлива линейная постановка задачи (случай малых возмущений).

Р-м 1-й случай. В рамках линейной постановки источник покоится и непрерывно посылает слабые импульсы возмущения. Среда до начала работы источника неподвижна и однородна, \vec{v}_0 источника равна нулю. Возмущения распространяются симметрично.

Если источник существовал очень давно, то вся среда от его импульсов возмущена и состояния относительно точки P симметричны.

Р-м 2-ой случай. Если источник движется, то возникают два подслучая:

Подслучай а). Скорость $v_0 < c_0$ и пусть \vec{v}_0 направлена по оси x .

1. Возмущения от источника обгоняют источник. Источник движется по уже возмущенному состоянию.
2. Возмущения, посланные источником из его предыдущих положений, всегда идут впереди возмущений, посланных из его последующих положений.

Все сферы-фронты возмущений не пересекаются.

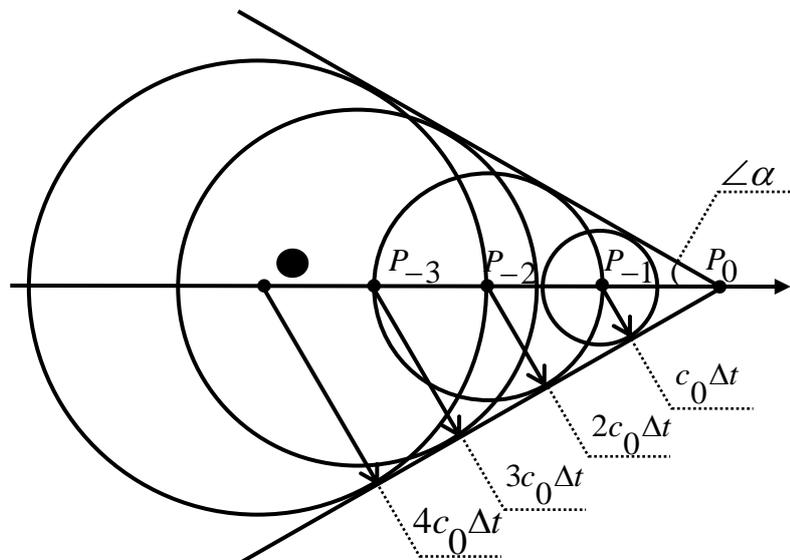
Следствие. Если источник двигался бесконечно долго до положения P_0 , то вся среда перед ним возмущена. Среда «видит» источник и заранее знает о нем, поток - зрячий.

3. Картина распространения возмущений несимметрична. Если источник излучает звуковые волны, то частота колебания волн впереди больше частоты позади. Этот эффект называется эффектом Доплера.

Подслучай б). Скорость $v_0 > c_0$. Источник движется по невозмущенному состоянию. Если он двигался бесконечно долго, то только часть объема позади него возмущена. Источник движется как «слепой». Конус, вершина которого в P_0 , а боковая поверхность является огибающей сфер радиуса $R = c_0 n \Delta t$, находящихся в точках P_{-n} . Этот конус называется конусом Маха.

Синус половины угла раствора конуса $\angle \alpha$ равен $\sin \angle \alpha = \frac{c_0 n \Delta t}{v_0 n \Delta t} = \frac{1}{M_0}$,

где $M_0 = \frac{v_0}{c_0}$.



Отметим, что на поверхности конуса Маха сопрягаются два решения линеаризованной системы уравнений движения p' и \vec{v} : одно отлично от нуля, другое равно нулю. Как мы знаем, уравнения гиперболического типа допускают слабые разрывы решений. Подобные поверхности сопряжения с различными свойствами называются характеристическими поверхностями системы уравнений в частных производных. В общем случае характеристические поверхности могут являться поверхностями слабого разрыва (первые производные терпят разрыв первого рода или высшие производные). Как уже говорилось в рамках теории малых возмущений, когда система уравнений движения линеаризована, на конусе Маха разрывы могут иметь и сами функции p' и \vec{v} .

Видно, что скорость распространения характеристической поверхности конуса Маха по неподвижной среде нормальна к его поверхности и равна c_0 (в линейном приближении).

Рассмотрим третий случай, когда $v_0 = c_0$. В этом случае конус Маха вырождается в полупространство. Угол полураствора конуса $\angle \alpha = 90^\circ$. Возмущения распространяются во всем полупространстве, если источник существовал бесконечно давно.

Итак,

- если $M = \frac{v_0}{c_0} < 1$, то дозвуковое течение — «зрячее»;
- если $M = \frac{v_0}{c_0} > 1$, то сверхзвуковое течение — «слепое»;
- если $M = \frac{v_0}{c_0} \approx 1$, то течение называют околосзвуковым или трансзвуковым.

Заметим, что если $M \gg 1$, то течение называют гиперзвуковым.

Отметим, что обычно в природе среда покоится, а источник движется. В модельных исследованиях источник покоится, а среда движется (например, в аэродинамической трубе).

Список вопросов к курсу лекций “Распространение волн в сплошных средах ч.1”

1. Понятие волны, волнового процесса. Понятия фазовой скорости, длины, частоты, периода волны, волнового числа и волнового вектора. Понятие плоских, цилиндрических и сферических волн.
2. Вывод балансовым методом системы уравнений для описания нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа в канале переменного сечения в одномерном приближении. (Нестационарная квазиодномерная модель газовой динамики). Дивергентная форма записи системы уравнений. Свойство универсальности полученной системы при описании одномерных течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами.
3. Преобразование системы уравнений квазиодномерной газовой динамики к виду удобному для линеаризации. Процедура преобразования уравнения энергии в уравнение изменения энтропии. Введение скорости звука и форма записи системы уравнений для

гомоэнтропических течений. Построение для модели термически и калорически

совершенного газа уравнения состояния вида
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \cdot \exp \left(\frac{s - s_0}{c_V} \right).$$

4. Линеаризация квазиодномерной системы уравнений газовой динамики для течения в канале с неподвижными стенками ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$) термически и калорически совершенного газа.

Свойства решений линейных систем дифференциальных уравнений.

5. Преобразование линеаризованной системы уравнений для случая когда основное невозмущенное движение газа – состояние покоя. Вывод волновых уравнений для скорости, давления, плотности газа. Введение потенциала скорости и получение для него волнового уравнения.

6. Построение общего решения волнового уравнения для случая плоских и сферических волн.

7. Постановка и решение задачи Коши для волнового уравнения в плоском случае. Физическая интерпретация решения задачи Коши для плоского случая.

8. Два примера решения задачи Коши для волнового уравнения в плоском случае (с ненулевым начальным возмущением и нулевой начальной скоростью; с нулевым начальным возмущением и ненулевой начальной скоростью).

9. Понятие устойчивости решения. Понятие обобщенного решения волнового уравнения.

10. Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений. Постановка и решение первой краевой задачи.

11. Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений. Постановка и решение второй и третьей краевых задач.

12. Интегральные формы записи основных законов сохранения. Вывод интегральной формы записи квазиодномерной системы уравнений газовой динамики.

13. Линеаризация интегральной системы уравнений квазиодномерной газовой динамики для случая когда основное невозмущенное движение газа – состояние покоя.

Вывод условий на сильном разрыве из линеаризованной интегральной системы уравнений.

14. Постановка и решение интегрального аналога задачи Коши для волнового уравнения на неограниченной прямой.

15. Постановка и решение интегрального аналога первой краевой задачи для волнового уравнения на полуограниченной прямой $x \geq 0$.

16. Определение характеристик – как линий распространения разрывов производных решений интегрального аналога волнового уравнения (линии слабого разрыва).

Получение кинематических и динамических условий на слабом разрыве.

17. Доказательство утверждения о том, что характеристики семейств $C_{\pm} : dx = \pm c_0 \cdot dt$ –

это линии в фазовой плоскости (t, x) , при постановке начальных условий на которых задача Коши как для волнового уравнения, так и для исходной линейной системы уравнений газовой динамики имеет неединственное решение. Условия направлений и условия совместности на характеристиках.

18. Основы метода (u, p) - диаграмм. Решение методом (u, p) - диаграмм задачи о распаде произвольного разрыва в покоящемся газе.

19. Инварианты Римана для линеаризованной системы уравнений одномерной газовой динамики для случая плоской симметрии. Решение задачи Коши для линеаризованной системы уравнений одномерной газовой динамики при помощи инвариантов Римана.

20. 5 примеров решений задачи Коши для линеаризованной системы уравнений одномерной газовой динамики при помощи инвариантов Римана .
21. Сравнительный анализ некоторых свойств квазилинейной и линейной систем уравнений одномерной газовой динамики.
22. Задача о распространении сигнала от точечного источника для случая плоских волн.
23. Задача о распространении сигнала от точечного источника для случая сферических волн.
24. Задача о распространении сигнала от точечного источника для случая цилиндрических волн.
25. Две задачи о распаде произвольного разрыва в покоящемся газе для случая плоских волн.
26. Задача об отражении акустической ударной волны от жесткой стенки для случая плоских волн.
27. Задача о поршне в акустической постановке
28. Задача о распаде произвольного разрыва в покоящемся газе для сферического случая.
29. Задача о распространении акустических возмущений в газе от движущегося точечного источника.

Литература

1. Зверев И. Н. Распространение волн в сплошных средах.- Обязательный специальный курс по кафедре газовой и волновой динамики.- М., 2000 г.
2. Куксенко Б. В. Распространение волн в сплошных средах. Часть 1. Волны в газах и жидкостях. – Обязательный специальный курс по кафедре газовой и волновой динамики.- М., 2004 г.
3. Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. Учебное пособие.– М., Изд-во Московского Университета, 1985г. – 415 с.
4. Зверев И. Н., Смирнов Н.Н. Газодинамика горения. М., Изд-во Московского Университета, 1987г. – 307 с.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М., Изд-во «Мир», 1977 г., 622 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., Изд-во «Московского Университета» и «Наука», 7-е издание, 2004 г., 798 с.
7. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва-Ижевск, Изд-во АНО «Институт компьютерных исследований», 2-е издание, 2003 г., 336 с.
8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М., Изд-во «Наука», 1978 г., 2-е издание, 687 с.

Сведения об авторах

Душин Владислав Роальдович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Смирнова Мария Николаевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, старший научный сотрудник Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук».

Тюренкова Вероника Валерьевна – младший научный сотрудник отдела вычислительных систем Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», младший научный сотрудник кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.